Equazioni differenziali con valori al bordo

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,
http://www.ing.unibs.it/gastaldi/

Indice

Equazioni differenziali con valori ai limiti

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{array}{l} -\mu u''(x) + \sigma(x) u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in (a, b) \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{array}$$

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $N + 1$ parti uguali e poniamo $h = (b - a)/(N + 1)$. Poniamo poi $x_i = a + ih$.
Possiamo approssimare la derivata seconda con la seguente differenza finita del secondo ordine

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \quad \text{per } i = 1, \ldots, N.$$

Indicando con u_i^h il valore approssimato di $u(x_i)$, si ottiene il seguente sistema lineare:

$$\begin{array}{l} -\mu \dfrac{u_{i+1}^h - 2u_i^h + u_{i-1}^h}{h^2} + \sigma(x_i) u_i^h = f(x_i) \quad \text{per } i = 1, \ldots, N \\ u_0^h = \alpha \qquad u_{N+1}^h = \beta \end{array}$$

Equazioni differenziali con valori ai limiti II

Quindi si ricava la soluzione u_i^h per $i = 1, \ldots, N$ risolvendo il sistema

$$A_h u^h = b$$

essendo A_h la matrice tridiagonale che ha i seguenti elementi

$$a_{ii} = 2\mu/h^2 + \sigma(x_i), \quad a_{ii-1} = a_{ii+1} = -\mu/h^2$$

e il termine noto è dato da

$$\begin{aligned} b_1 &= f(x_1) + \mu\alpha/h^2, \\ b_i &= f(x_i) \text{ per } i = 2, \ldots, N-1, \\ b_N &= f(x_N) + \mu\beta/h^2. \end{aligned}$$

Stima dell'errore

$$\max_{1\le i\le N} |u(x_i) - u_i^h| \le Ch^2 \max_{a\le x\le b} |u^{(4)}(x)|$$

Costruzione della matrice

Per costruire la matrice del sistema lineare che si ottiene con le differenze finite osserviamo che si può scrivere $A = (\mu/h^2)K + M$ essendo

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \sigma(x_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma(x_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \sigma(x_N) \end{bmatrix}$$

Costruzione del termine noto

Il termine noto può essere scritto come la somma di due vettori $b = F + bc$: F tiene conto del dato f sull'intervallo, mentre bc è relativo alle condizioni al bordo.

$$F = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ \dots \\ f(x_N) \end{bmatrix} \qquad bc = \begin{bmatrix} \mu\alpha/h^2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \mu\beta/h^2 \end{bmatrix}$$

Soluzione dell'equazione differenziale

Scrivere la function eqlim per calcolare la soluzione dell'equazione differenziale con valori ai limiti

$$\begin{array}{l} -\mu u''(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in [a, b] \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{array}$$

mediante il seguente comando:

```
[x,u]=eqlim(f,sigma,mu,a,b,alfa,beta,N)
```

Input

`f,sigma`	nome delle function_handle che contengono l'espressione analitica di f e σ
`mu`	coefficiente davanti alla derivata seconda
`a,b`	estremi dell'intervallo
`alfa,beta`	valori ai limiti
`N`	numero di punti in cui si calcola la soluzione

Output

`x`	ascisse dei punti in cui si calcola la soluzione
`u`	valori della soluzione

Function `eqlim`

La function `eqlim` si compone di 5 passi:

- assegnazione della griglia di calcolo: calcolo h e i punti $x_i = a + ih$ per $i = 1, \dots, N$;
- costruzione della matrice A_h come suggerito usando i comandi `ones` e `diag`;
- costruzione del termine noto (attenzione al nome);
- risoluzione del sistema lineare;
- organizzazione dell'output che tenga conto delle condizioni al bordo.

Oss Si possono completare i vettori `x` e `u` con i valori negli estremi dell'intervallo. Per fare ciò si devono aggiungere le rispettive componenti all'inizio ed alla fine del vettore, con i comandi

- `x=[a,x,b]` se `x` è un vettore riga;
- `u=[alfa;u;beta]` se `u` è un vettore colonna.

Esercizio 1

Risolvere l'equazione differenziale

$$
\begin{aligned}
&-u''(x) + \sin x\, u(x) = (1 - \cos^2 x - 2\cos x)e^x \quad \text{per } x \in [0, \pi] \\
&u(0) = u(\pi) = 0.
\end{aligned}
$$

Confrontare i risultati ottenuti con la soluzione esatta
$u(x) = \sin x\, e^x$.

Scrivere un file di tipo script che:

- assegna i dati, in particolare le funzioni f e σ di tipo `@`;
- calcola la soluzione usando la function `eqlim`;
- plotta la soluzione discreta insieme a quella continua;
- calcola l'errore

$$E = \max_{1 \leq i \leq N} |u(x_i) - u_i^h|.$$

Errore Per calcolare l'errore usare il comando `norm` (si veda il file `matrici.pdf`).

Convergenza del metodo delle differenze finite

Esercizio 2

Dato `N=[10 20 40 80 160 320]`, per ciascun valore di N

- calcolare la soluzione dell'equazione differenziale dell'esercizio precedente;
- riportare la soluzione in un grafico insieme alla soluzione esatta;
- valutare l'errore relativo.

Alla fine riportare gli errori in funzione di `N` in un grafico in scala bilogaritmica insieme all'andamento teorico.
Calcolare l'ordine di convergenza del metodo.

Calcolo dell'ordine di convergenza

Supponiamo che la stima dell'errore per un certo metodo sia

$$E(h) \approx Ch^p \quad \text{essendo } h = (b-a)/(N+1).$$

La relazione dipende quindi da due quantità incognite C e p.
Per calcolare il valore di p, valutiamo l'espressione dell'errore per due diversi valori di h, h_1 e h_2:

$$E(h_1) \approx Ch_1^p, \quad E(h_2) \approx Ch_2^p$$

Dividiamo la prima relazione per la seconda, per eliminare C:

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \approx \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p ;$$

p si ottiene prendendo i logaritmi ad entrambi i membri:

$$\log \frac{E(h_1)}{E(h_2)} \approx p \log \frac{h_1}{h_2}$$

da cui

$$p = \frac{\log E(h_1) - \log E(h_2)}{\log h_1 - \log h_2}$$

Rappresentazione dell'ordine di convergenza

Supponiamo che la stima dell'errore per un certo metodo sia

$$E(h) \approx Ch^p \quad \text{essendo } h = (b-a)/(N+1).$$

Per rappresentare il valore di p, calcoliamo il logaritmo ad entrambi i membri, ottenendo:

$$\log E(h) \approx \log C + p \log h.$$

Quindi il grafico di $\log E(h)$ in funzione di $\log h$ è una retta con coefficiente angolare pari a p.
Poiché si ha che $\log h = \log(b-a) - \log(N+1)$, il grafico dell'errore in funzione di N, è una retta con coefficiente angolare uguale a $-p$.
`loglog(N,E)` produce il grafico di $\log E(h)$ in funzione di $\log N$.
Per verificare il valore di p, confrontare l'andamento di $\log E(h)$ con quello di $p \log h$ con il comando `loglog(N,E,N,1./N.^p)`.

Convergenza del metodo delle differenze finite

Svolgimento dell'Esercizio 2

Scrivere un file di tipo script per eseguire i seguenti passi.

- Assegnare i dati: f, σ, a, b, α, β e la soluzione esatta *sol*.
- Assegnare `N=[10 20 40 80 160 320]`.
- Usando un ciclo `for` per ciascun valore di N:
  - calcolare la soluzione `u`, usando la function `eqlim`;
  - valutare la soluzione esatta nei punti della griglia;
  - riportare in uno stesso grafico la soluzione esatta e quella discreta;
  - calcolare l'errore con il comando `E(i)=norm(u-sol,inf)` (`i` rappresenta la varibile del ciclo `for`).
- Riportare gli errori in funzione di `N` in un grafico in scala bilogaritmica: `loglog(N,E)`.
- Calcolare l'ordine del metodo con il comando:

```
p=(log(E(2:end))-log(E(1:end-1)))./...
                  (log(N(1:end-1))-log(N(2:end)))
```

Il comando **pause** interrompe l'esecuzione. Si inserisce prima della fine del ciclo in modo da visualizzare il grafico ottenuto.

Esercizio 3

Dato $q \geq 2$, si consideri l'equazione differenziale

$$-u''(x) = q(q-1)|x|^{q-2} \text{ per } x \in (-1,1), \qquad u(-1) = u(1) = 0.$$

La soluzione è data dalla funzione $u(x) = 1 - |x|^q$.
Calcolare l'ordine di convergenza del metodo delle differenze finite in corrispondenza ai seguenti valori di q:

$$q = 2, 2.5, 3, 3.5, 4.$$

Cosa succede se $q < 2$? Per esempio per $q = 1$ o $q = 3/2$?

Usare le seguenti scelte per N:

```
N=[4 8 16 32 64 128 256 512];
N=[4 8 16 32 64 128 256 512]+1;
```

Esercizio 4

Si consideri l'equazione differenziale

$$-u''(x) = 12x^2 \text{ per } x \in (-1, 1) \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

La soluzione è $u(x) = 1 - x^4$.
Calcolare la soluzione con il metodo delle differenze finite in corrispondenza dei seguenti valori di `N`

```
N=[10 20 40 80 160 320 640 1280];
N=[N 2500 5000 10000 20000 40000 80000 1.e5 1.2e5
1.5e5];
```

Valutare per ciascun valore di `N` l'errore relativo e riportare gli errori in funzione di `N` in un grafico in scala bilogaritmica insieme all'andamento teorico.

Equazioni di diffusione trasporto

Si consideri l'equazione differenziale

$$-\mu u''(x) + \eta(x)u'(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in [a, b]$$
$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.$$

Per approssimare la derivata prima si possono usare le seguenti **differenze finite** ($h > 0$):

diff. finita centrata $\quad u'(\bar{x}) \approx \delta u(\bar{x}) = \dfrac{u(\bar{x}+h) - u(\bar{x}-h)}{2h}$

diff. finita all'indietro $\quad u'(\bar{x}) \approx \delta^- u(\bar{x}) = \dfrac{u(\bar{x}) - u(\bar{x}-h)}{h}$

diff. finita in avanti $\quad u'(\bar{x}) \approx \delta^+ u(\bar{x}) = \dfrac{u(\bar{x}+h) - u(\bar{x})}{h}$

Risoluzione con differenze finite centrate

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $N + 1$ parti uguali e poniamo $h = (b - a)/(N + 1)$. Poniamo poi $x_i = a + ih$ e $u_i^h \approx u(x_i)$. Usando le differenze finite centrate si ottiene il seguente sistema lineare:

$$-\mu \frac{u_{i-1}^h - 2u_i^h + u_{i+1}^h}{h^2} + \eta(x_i)\frac{u_{i+1}^h - u_{i-1}^h}{2h} + \sigma(x_i)u_i^h = f(x_i) \qquad \text{per } i = 1, \dots, N$$

$$u_0^h = \alpha, \quad u_{N+1}^h = \beta$$

Risoluzione con differenze finite centrate II

Quindi si ricava la soluzione u_i^h per $i = 1, \ldots, N$ risolvendo il sistema

$$A^h u^h = b$$

essendo A^h la matrice tridiagonale che ha i seguenti elementi

$$a_{ii} = 2\mu/h^2 + \sigma(x_i), \quad a_{ii-1} = -\mu/h^2 - \eta(x_i)/2h,$$
$$a_{ii+1} = -\mu/h^2 + \eta(x_i)/2h$$

e il termine noto è dato da

$$b_1 = f(x_1) + (\mu/h^2 + \eta(x_1)/2h)\alpha,$$
$$b_i = f(x_i) \text{ per } i = 2, \ldots, N-1,$$
$$b_N = f(x_N) + (\mu/h^2 - \eta(x_N)/2h)\beta.$$

Function bvp_centr

La function `bvp_centr` serve per calcolare la soluzione dell'equazione differenziale con valori ai limiti

$$\begin{array}{l} -\mu u''(x) + \eta u'(x) + \sigma(x) u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in [a, b] \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{array}$$

essendo $\eta \in \mathbb{R}$.

```
[x,u]=bvp_centr(f,sigma,eta,mu,a,b,alfa,beta,N)
```

Input

`f,sigma`	nome delle function_handle che contengono l'espressione analitica di f e σ
`eta`	coefficiente davanti alla derivata prima
`mu`	coefficiente davanti alla derivata seconda
`a,b`	estremi dell'intervallo
`alfa,beta`	valori ai limiti
`N`	numero di punti in cui si calcola la soluzione

Output

`x`	ascisse dei punti in cui si calcola la soluzione
`u`	valori della soluzione

Function bvp_centr

Modificare opportunamente la function `eqlim` tenendo conto che la matrice associata alla discretizzazione della derivata prima è data da $B/(2h)$ essendo:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha quindi la seguente espressione $A = (\mu/h^2)K + (\eta/(2h))B + M$ e il termine noto deve essere modificato opportunamente tenendo conto delle condizioni al bordo.

Esercizi

Si consideri l'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} -u''(x) - 2u'(x) + e^x\, u(x) \\ = \sin(x)(1+e^x) + \cos(x)(2e^{-x} - 1) \\ \text{per } x \in [-\pi, \pi] \\ u(-\pi) = -e^{\pi}, \quad u(\pi) = -e^{-\pi}. \end{aligned}$$

La soluzione esatta è: $u(x) = \sin(x) + e^{-x}\cos(x)$.

Esercizio 5

Usando la function `bvp_centr` calcolare la soluzione, plottare la soluzione discreta insieme a quella esatta e calcolare l'errore.

Esecizio 6

Verificare che l'ordine di convergenza del metodo è $p = 2$.

Problemi con trasporto dominante

Esercizio 7

Si consideri l'equazione differenziale:

$$-\varepsilon u''(x) + u'(x) = 0 \quad \text{per } x \in [0,1]$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

Risolvere l'equazione data con i seguenti valori di `N=[10 20 40 80 160]`. Confrontare il comportamento della soluzione discreta per i seguenti valori $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.1$ e $\varepsilon = 0.01$.

Risoluzione con differenze finite all'indietro

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $N + 1$ parti uguali e poniamo $h = (b - a)/(N + 1)$. Poniamo poi $x_i = a + ih$ e $u_i^h \approx u(x_i)$. Usando le differenze finite all'indietro si ottiene il seguente sistema lineare:

$$-\mu \frac{u_{i-1}^h - 2u_i^h + u_{i+1}^h}{h^2} + \eta(x_i)\frac{u_i^h - u_{i-1}^h}{h} + \sigma(x_i)u_i^h = f(x_i)$$

$$\text{per } i = 1, \ldots, N$$

$$u_0^h = \alpha, \quad u_{N+1}^h = \beta$$

Risoluzione con differenze finite all'indietro II

Quindi si ricava la soluzione u_i^h per $i = 1, \ldots, N$ risolvendo il sistema

$$A^h u^h = b$$

essendo A^h la matrice tridiagonale che ha i seguenti elementi

$$\begin{aligned} &a_{ii} = 2\mu/h^2 + \eta(x_i)/h + \sigma(x_i), \\ &a_{ii-1} = -\mu/h^2 - \eta(x_i)/h, \quad a_{ii+1} = -\mu/h^2 \end{aligned}$$

e il termine noto è dato da

$$\begin{aligned} &b_1 = f(x_1) + (\mu/h^2 + \eta(x_1)/h)\alpha, \\ &b_i = f(x_i) \text{ per } i = 2, \ldots, N-1, \\ &b_N = f(x_N) + \mu\beta/h^2. \end{aligned}$$

Function bvp_indietro

La function `bvp_centr` serve per calcolare la soluzione dell'equazione differenziale con valori ai limiti

$$
\begin{array}{l}
-\mu u''(x) + \eta u'(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in [a, b] \\
u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.
\end{array}
$$

essendo $\eta \in \mathbb{R}$.

`[x,u]=bvp_indietro(f,sigma,eta,mu,a,b,alfa,beta,N)`

Input

`f,sigma`	nome delle function_handle che contengono l'espressione analitica di f e σ
`eta`	coefficiente davanti alla derivata prima
`mu`	coefficiente davanti alla derivata seconda
`a,b`	estremi dell'intervallo
`alfa,beta`	valori ai limiti
`N`	numero di punti in cui si calcola la soluzione

Output

`x`	ascisse dei punti in cui si calcola la soluzione
`u`	valori della soluzione

Function bvp_indietro

Modificare opportunamente la function `bvp_indietro` tenendo conto che la matrice associata alla discretizzazione della derivata prima è data da B_i/h essendo:

$$B_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 1 & 0\dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha quindi la seguente espressione
$A = (\mu/h^2)K + (\eta/h)B_i + M$ e il termine noto deve essere modificato opportunamente tenendo conto delle condizioni al bordo.

Risoluzione con differenze finite in avanti

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $N + 1$ parti uguali e poniamo $h = (b - a)/(N + 1)$. Poniamo poi $x_i = a + ih$ e $u_i^h \approx u(x_i)$. Usando le differenze finite in avanti si ottiene il seguente sistema lineare:

$$
-\mu \frac{u_{i-1}^h - 2u_i^h + u_{i+1}^h}{h^2} + \eta(x_i)\frac{u_{i+1}^h - u_i^h}{h} + \sigma(x_i)u_i^h = f(x_i)
$$

$$
\text{per } i = 1, \ldots, N
$$

$$
u_0^h = \alpha, \quad u_{N+1}^h = \beta
$$

Risoluzione con differenze finite in avanti II

Quindi si ricava la soluzione u_i^h per $i = 1, \ldots, N$ risolvendo il sistema

$$A^h u^h = b$$

essendo A^h la matrice tridiagonale che ha i seguenti elementi

$$\begin{aligned} & a_{ii} = 2\mu/h^2 - \eta(x_i)/h + \sigma(x_i), \\ & a_{ii-1} = -\mu/h^2, \quad a_{ii+1} = -\mu/h^2 + \eta(x_i)/h \end{aligned}$$

e il termine noto è dato da

$$\begin{aligned} & b_1 = f(x_1) + \mu\alpha/h^2, \\ & b_i = f(x_i) \text{ per } i = 2, \ldots, N-1, \\ & b_N = f(x_N) + (\mu/h^2 - \eta(x_N)/h)\beta. \end{aligned}$$

Function bvp_avanti

In analogia con quanto fatto per le differenze finite in avanti, modificare la function `bvp_indietro` per implementare la risoluzione dell'equazione differenziale con le differenze finite in avanti.
La matrice associata alla discretizzazione della derivata prima è data da B_a/h essendo:

$$B_a = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha quindi la seguente espressione
$A = (\mu/h^2)K + (\eta/h)B_a + M$ e il termine noto deve essere modificato opportunamente tenendo conto delle condizioni al bordo.

Esercizi

Esercizio 8

Si consideri l'equazione differenziale usata per svolgere l'Esercizio 5 e si confrontino le soluzioni ottenute con le tre differenze finite. Verificare che, approssimando la derivata prima, con le differenze finite centrate, il metodo è del secondo ordine, mentre le differenze finite in avanti e all'indietro danno una convergenza al primo ordine.

Esercizio 9

Risolvere l'equazione differenziale dell'Esercizio 7 usando sia la function `bvp_indietro` che `bvp_avanti`.

Esercizi

Esercizio 10

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} &-\varepsilon u''(x) - u'(x) = 0 \quad \text{per } x \in [0,1] \\ &u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \end{aligned}$$

Confrontare il comportamento delle soluzioni ottenute con le function `bvp_centr`, `bvp_indietro` e `bvp_avanti` per i seguenti valori $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.1$ e $\varepsilon = 0.01$.

Metodo upwind

La function `bvp_upwind` adotta una scelta automatica del metodo di discretizzazione della derivata prima.

Si usa con il comando

```
[x,u]=bvp_upwind(f,sigma,eta,mu,a,b,alfa,beta,N)
```

i dati in input e i risultati in output hanno il solito significato.

Usare la function `bvp_upwind` per risolvere le equazioni differenziali degli esercizi 7 e 10 con valori di ε anche più piccoli.