Autovalori ed autovettori di una matrice

Lucia Gastaldi

DICATAM
http://www.ing.unibs.it/gastaldi/

Indice

Autovalori ed autovettori di una matrice

Definizione

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice **autovalore della matrice** A, se esiste un vettore $x \in \mathbb{C}^n$ tale che $x \neq 0$ e

$$Ax = \lambda x.$$

Il vettore x si chiama **autovettore della matrice** A associato all'autovalore λ.

Osservazione

Gli autovettori di una matrice **non** sono unici: se x è un autovettore di A associato a λ anche αx, con $\alpha \in \mathbb{C}$, è autovettore di A associato a λ.

$$A(\alpha x) = \alpha A x = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x)$$

Polinomio caratteristico

Da $Ax = \lambda x$, si ricava $(A - \lambda I)x = 0$, essendo I la matrice identità. Affinché esista $x \neq 0$ che soddisfa questa relazione, la matrice $A - \lambda I$ deve essere singolare cioè

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Proposizione

Gli autovalori di una matrice sono tutte e sole le radici del **polinomio caratteristico** definito da

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Molteplicità di un autovettore

Molteplicità di un autovalore

λ si dice **autovalore semplice** di A se λ è una radice semplice del polinomio $p(\lambda)$.
λ ha **molteplicità** ν se λ è una radice di molteplicità ν di $p(\lambda)$.

Per il teorema dell'algebra esistono esattamente n autovalori di una matrice di ordine n se vengono contati tenendo conto della loro molteplicità.

Autospazio

Si definisce **autospazio** associato all'autovalore λ lo spazio lineare

$$V(\lambda) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax - \lambda x = 0\}.$$

La dimensione di $V(\lambda)$ è minore o uguale alla molteplicità ν di λ.

Diagonalizzazione di una matrice

Matrici simili

Date due matrici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se esiste una matrice non singolare $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tale che

$$B = X^{-1}AX$$

allora le matrici A e B si dicono **simili**.

Due matrici simili hanno gli stessi autovalori e lo stesso polinomio caratteristico, infatti:

$$B(X^{-1}x) = (X^{-1}AX)(X^{-1}x) = X^{-1}Ax = X^{-1}(\lambda x) = \lambda X^{-1}x.$$

Diagonalizzazione di A

La matrice A si dice **diagonalizzabile** se esistono una matrice invertibile $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e una matrice diagonale $\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tali che

$$\Lambda = X^{-1}AX.$$

Diagonalizzazione di una matrice

Se A è diagonalizzabile allora gli autovettori sono linearmente indipendenti. Infatti si ha

$$\Lambda = X^{-1}AX \quad \Rightarrow \quad AX = X\Lambda.$$

Le colonne di X danno gli autovettori della matrice A; siccome X è non singolare le sue colonne sono linearmente indipendenti.

Matrici hermitiane

Matrici hermitiane

La matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice **hermitiana** se $A = A^H$ essendo A^H la matrice di elementi:

$$a_{ij}^H = \overline{a_{ji}}$$

($\overline{a}$ è il complesso coniugato di a).

Osservazione Se A è una matrice ad elementi reali allora $A^H = A^T$.

Teorema

- Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice hermitiana, allora i suoi autovalori sono reali.
- Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice hermitiana, allora i suoi autovettori sono a due a due ortogonali.

Condizionamento degli autovalori

Teorema di Bauer-Fike

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice diagonalizzabile, cioè esistono $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ non singolare e $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonale tali che $\Lambda = X^{-1}AX$.
Se μ è un autovalore della matrice $A + E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ allora

$$\min_{\lambda} |\lambda - \mu| \le K_p(X) \|E\|_p$$

essendo $K_p(X)$ il numero di condizionamento di X nella norma $\| \cdot \|_p$.

Localizzazione degli autovalori

Teorema di Gershgorin Data la matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, costruiamo i seguenti cerchi del piano complesso:

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq= \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|\} \quad i = 1, \ldots, n$$

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq= \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ji}|\} \quad i = 1, \ldots, n$$

Allora gli autovalori della matrice A sono contenuti sia nell'unione dei dischi C_i che dei dischi D_i , ossia

$$\lambda \in \left(\cup_{i=1}^{n} C_i\right) \cap \left(\cup_{i=1}^{n} D_i\right).$$

Inoltre, se p dischi C_i sono disgiunti dai rimanenti, si ha che esattamente p autovalori di A cadono nell'unione di questi dischi.

Localizzazione degli autovalori

La function `gershgorin.m` disegna i cerchi di Gershgorin di una assegnata matrice A. Si deve usare il seguente comando

```
gershgorin(A)
```

In blu sono disegnati i cerchi C_i costruiti per righe;
in rosso sono disegnati i cerchi D_i costruiti per colonne.

Metodo delle potenze

Metodo delle potenze

Data una matrice diagonalizzabile A con autovalori che soddisfano:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Il metodo delle potenze permette di calcolare l'autovettore associato all'autovalore di modulo massimo.
Usando il rapporto di Rayleigh si ottiene anche un'approssimazione dell'autovalore di modulo massimo.

Algoritmo delle potenze

- Dati A, x_0 tale che $\|x_0\| = 1$;
- per $k = 1, 2, \ldots$ fino a convergenza
  - calcola $y_k = Ax_{k-1}$;
  - normalizza $x_k = y_k / \|y_k\|$;
  - valuta l'autovalore $\lambda_k = x_k^T A x_k$.

Test d'arresto

- residuo: $\|Ax_k - \lambda_k x_k\| \leq tol$;
- differenza fra le ultime iterate: $|\lambda_k - \lambda_{k-1}| \leq tol|\lambda_k|$.

Metodo delle potenze inverse

Il metodo delle potenze inverse permette di calcolare l'autovettore associato all'autovalore di modulo minimo (purché diverso da zero) della matrice A.
Basta applicare il metodo delle potenze alla matrice A^{-1}.

Algoritmo delle potenze inverse

- Dati A, x_0 tale che $\|x_0\| = 1$;
- calcola la fattorizzazione di $PA = LU$
- per $k = 1, 2, \ldots$ fino a convergenza
  - risolve $Ay_k = x_{k-1}$ usando la fattorizzazione di A;
  - normalizza $x_k = y_k / \|y_k\|$;
  - valuta l'autovalore $\lambda_k = x_k^T A x_k$.

Metodo delle potenze inverse con shift

Per calcolare l'autovettore associato all'autovalore più vicino ad un certo valore μ si applica uno **shift** alla matrice A come segue:

$$(A - \mu I)x = (\lambda - \mu)x.$$

L'autovalore più vicino a μ è quindi tale che $|\lambda - \mu|$ sia minimo, quindi si applica il metodo delle potenze inverse alla matrice $A - \mu I$.

Algoritmo delle potenze inverse con shift

- Dati A, μ, x_0 tale che $\|x_0\| = 1$;
- calcola la fattorizzazione di $P(A - \mu I) = LU$
- per $k = 1, 2, \ldots$ fino a convergenza
  - risolve $(A - \mu I)y_k = x_{k-1}$ usando la fattorizzazione di $A - \mu I$;
  - normalizza $x_k = y_k / \|y_k\|$;
  - valuta l'autovalore $\lambda_k = x_k^T A x_k$.

Function di Matlab per il calcolo di autovalori ed autovettori

eig

La function `eig` calcola tutti gli autovalori e gli autovettori della matrice A mediante il metodo QR.

- `e=eig(A)` fornisce un vettore contenente gli autovalori di A.
- `[V,D]=eig(A)` fornisce la matrice diagonale `D`, contenente gli autovalori sulla diagonale, e la matrice `V`, contenente gli autovettori (colonna per colonna) tali che $A * V = V * D$.

Function di Matlab per il calcolo di autovalori ed autovettori

eigs

La function `eigs` calcola gli autovalori di modulo più grande e gli autovettori associati di una matrice in formato sparse applicando il metodo di Arnoldi.

- `e=eigs(A)` calcola i sei autovalori più grandi in modulo.
- `[V,D]=eigs(A)` calcola la matrice diagonale D contenente i sei autovalori più grandi in modulo e la matrice V le cui colonne sono i corrispondenti autovettori.
- `eisg(A,k)` calcola i k autovalori di A più grandi in modulo.
- `eigs(A,k,sigma)` calcola k autovalori con i seguenti criteri:

`sigma` scalare	k autovalori più vicini a `sigma`
`sigma`='lm'	k autovalori più grandi
`sigma`='sm'	k autovalori più piccoli
`sigma`='be'	k autovalori più grandi e più piccoli

La function `potenze`

`potenze.m`

```
[lambda,x,iter,lam_iter]=potenze(A,x0,toll,nmax)
```

`lambda`	autovalore calcolato;
`x`	autovettore calcolato;
`iter`	numero di iterazioni per arrivare a convergenza;
`lam_iter`	successione dei valori di λ calcolati;
`A`	matrice;
`x0`	vettore iniziale;
`toll`	tolleranza;
`nmax`	numero massimo di iterazioni;

Le function `shiftinv`

shiftinv.m

```
[lambda,x,iter,lam_iter]=shiftinv(A,mu,x0,toll,nmax)
```

`lambda`	autovalore calcolato;
`x`	autovettore calcolato;
`iter`	numero di iterazioni per arrivare a convergenza;
`lam_iter`	successione dei valori di λ calcolati;
`A`	matrice;
`mu`	shift;
`x0`	vettore iniziale;
`toll`	tolleranza;
`nmax`	numero massimo di iterazioni;

Esercizi

Esercizio 1 Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1-7i & 2 & 1 & 0 \\ -2 & i & 0 & 1-i \\ 3+2i & 1 & 2 & 4i \\ 0 & 0 & i & -7 \end{pmatrix}$$

- Usare la function `gershgorin` per localizzare gli autovalori delle due matrici.
- Calcolare autovalori ed autovettori delle due matrici mediante la function `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin.
- Usare il metodo delle potenze `potenze` e delle potenze inverse con shift `shiftinv` per calcolare gli autovalori di modulo massimo, minimo e quelli più vicini a $\mu = 5$. (`toll=1e-6,nmax=100`)
- Marcare gli autovalori calcolati sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin.

Esercizio

Esercizio 2 Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Usare la function `gershgorin` per localizzare gli autovalori.
- Calcolare gli autovalori con la function `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin.
- Usare la function `potenze` per calcolare l'autovalore di modulo massimo.
- Usare la function `shiftinv` con shift $\mu = 0$ per calcolare l'autovalore di modulo minimo.
- Osservato che `shiftinv` con shift $\mu = 0$ non converge e che gli autovalori di modulo minimo sono complessi coniugati, trovare degli shift che permettano di calcolarli.
- Marcare tutti gli autovalori calcolati sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin.

Esercizio

Esercizio 3

Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & 10 & 12 \\ 6 & -6 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

- Calcolare gli autovalori e gli autovettori usando il comando `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin;
- calcolare l'autovalore di modulo massimo e l'autovettore associato mediante la function `potenze`, usando come vettore iniziale
  `x0=[0 1 0 1]'` e `x0=[0 0 1 -1]'`;
- verificare che uno dei due vettori iniziali risulta ortogonale all'autovettore calcolato (usare `toll=1.e-10`).

Esercizio

Esercizio 4

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3.5 + i/3 & -2.5 + i/3 & -2.5 + i & 4 \\ 1.5 + i/6 & 1.5 + i/6 & -3.5 + i/2 & 2 \\ i/6 & -2 + i/6 & 3 + i/2 & 2 \\ -0.5 + i/3 & 2.5 - 2i/3 & -1.5 & -1 + i \end{pmatrix}$$

- Calcolare gli autovalori e gli autovettori usando il comando `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin;
- calcolare l'autovalore di modulo massimo e l'autovettore associato mediante la function `potenze`, usando come vettore iniziale
  `x0=[0 1 0 1]'` e `x0=[0.5 0 1 0.5]'`;
- verificare che uno dei due vettori iniziali risulta ortogonale all'autovettore calcolato.

Frequenze di vibrazione di una membrana

Le frequenze di vibrazione di una membrana si ottengono risolvendo il seguente problema agli autovalori per un'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} -\Delta u = \lambda u \qquad & x \in \Omega =]0, \pi[\times]0, \pi[\\ u = 0 \qquad & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Si hanno infiniti autovalori $\lambda_{n,m} = n^2 + m^2$ essendo n, m numeri interi positivi.
Le corrispondenti autosoluzioni sono $u_{n,m} = \sin(nx)\sin(my)$.
Usando le differenze finite il problema differenziale si riconduce alla ricerca degli autovalori della matrice A_h delle differenze finite.

Esercizio sull'uso di `eigs`

- Costruire usando la function `dirichlets` la matrice dei coefficienti associata al Laplaciano con condizioni di Dirichlet nulle sul quadrato $[0, \pi] \times [0, \pi]$.
- Usando il comando `eigs` calcolare i 10 autovalori più piccoli e gli autovettori associati.
- Verificare che gli autovettori sono le approssimazioni dei numeri $n^2 + m^2$ per n e m interi e positivi.
- Plottare con il comando `plottasol` i corrispondenti autovettori.
- Plottare le autofunzioni esatte $u(x, y) = \sin(nx) sin(my)$. Si osserva che in corrispondenza degli autovalori multipli le autosoluzioni calcolate sono diverse da quelle esatte.