Interpolazione

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,
http://lucia-gastaldi.unibs.it

Indice

Interpolazione

Problema Dati $n+1$ punti $(x_i, y_i = f(x_i))$ per $i = 0, 1, \ldots, n$ si cerca una funzione approssimante $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\tilde{f}(x_i) = y_i \quad \text{per } i = 0, 1, \cdots, n. \tag{1}$$

La funzione $\tilde{f}$ è detta interpolatore di f e le condizioni (1) sono dette condizioni di interpolazione.

Interpolazione polinomiale

$$\tilde{f}(x) = p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

Polinomi

Un polinomio di grado n, con n intero non negativo, è una funzione del tipo

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j}$$

dove $a_j \in \mathbb{R}$, per $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, sono i coefficienti del polinomio.

Nota bene

Il polinomio è individuato dai coefficienti che devono essere memorizzati in un vettore.
In MATLAB i coefficienti devono essere **ordinati** a partire da quello corrispondente al termine di grado **più elevato** fino a quello di grado zero.
I coefficienti nulli vanno esplicitati.

Ad esempio al polinomio $p(x) = 1 - 2x + 4x^3$ si associa il vettore `p=[4 0 -2 1]`.

Algoritmo di Horner–Ruffini

L'algoritmo di Horner–Ruffini permette di calcolare il valore di un polinomio in un punto ad un costo computazionale inferiore rispetto all'uso della formula

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$$

Il polinomio può essere scritto nella forma di Horner:

$$p(x) = ((((a_0 x + a_1) x + a_2) \ldots) x + a_{n-1}) x + a_n.$$

Numero di operazioni

- Nel primo caso: $n(n+1)/2$ $(1 + 2 + \cdots + n)$ moltiplicazioni $+$ n somme per ciascuna componente di x

  Totale $\frac{n}{2}(n+3)N$ se N è il numero delle componenti di x

- Nel secondo caso: n moltiplicazioni $+$ n somme per ciascuna componente di x

polyval

La function polyval valuta il valore di un polinomio usando l'algoritmo di Horner_Ruffini.

```
yi=polyval(p,xi)
```

Input

p	vettore dei coefficienti;
xi	punti in cui si vuole calcolare il valore del polinomio.

Output

yi	valore del polinomio yi ha la stessa dimensione di xi.

Quindi per calcolare il valore del polinomio $p(x) = 1 + 2x - 4x^3$ nei punti *xi* distribuiti in maniera equispaziata nell'intervallo $[a, b]$ si può usare la seguente sequenza di comandi:

```
>> xi=linspace(-1,1,101);
>> p=[-4 0 2 1];
>> yi=polyval(p,xi);
```

Esercizi

Esercizio 1

Riportare in una stessa figura il grafico dei seguenti due polinomi:

$$p_1(x) = 1 - 3x - 4x^2 + 2x^5 \quad x \in [-3/2, 3/2]$$
$$p_2(x) = 2 + 3x - 2x^3 - 3x^4 \quad x \in [-3/2, 3/2]$$

Esercizio 2

Sia x il vettore che contiene i punti dell'intervallo $[0.995, 1.005]$ equispaziati a distanza 10^{-4} (usare `x=.995:1.e-4:1.005`). Fare il grafico del polinomio:

$$p(x) = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1.$$

Confrontare il grafico ottenuto con quello della funzione $f(x) = (x-1)^6$ nello stesso intervallo.

Esistenza ed unicità del polinomio interpolatore

Teorema

Per ogni insieme di punti (x_i, y_i) per $i = 0, 1, \cdots, n$, con gli x_i distinti tra loro, esiste un unico polinomio di grado n, che indicheremo con Π_n, tale che

$$\Pi_n(x_i) = y_i \quad \text{per } i = 0, 1, \cdots, n.$$

Esso viene detto **polinomio interpolatore** dei valori y_i nei **nodi** x_i.

Se per una opportuna funzione si ha $y_i = f(x_i)$ allora indichiamo con $\Pi_n f$ il polinomio interpolatore che approssima la funzione f.

polyfit

La function **polyfit** fornisce i coefficienti del polinomio Π_n.
La sintassi di polyfit è:

```
p=polyfit(x,y,n)
```

dove x contiene i nodi x_i, y contiene i valori della funzione y_i e n è il grado del polinomio interpolatore.
Ad esempio:

```
>> x=0:4;
>> y=[2 0 -1 -2 1];
>> p=polyfit(x,y,4)

p = 0.2083   -1.4167    3.2917   -4.0833    2.0000
```

Per fare il grafico del polinomio interpolatore:

```
>> xi=linspace(0,4,51);
>> yp=polyval(p,xi);
>> plot(xi,yp,x,y,'or')
```

Esercizio 3

Calcolo dei coefficienti del polinomio interpolatore e sua rappresentazione

Si consideri la funzione $f(x) = (1 - x^2)\arctan(x) + e^x$ nell'intervallo $[-4, 4]$. Dati i nodi `x=[-3 -1 2 3 ];`, usare il comando polyfit per trovare i coefficienti del polinomio interpolatore.
Riportare in una stessa figura il grafico del polinomio interpolatore e della funzione f.

Suggerimento

Per ottenere il grafico valutare il polinomio (usare il comando `polyval`) e la funzione in un numero appropriato di punti equispaziati nell'intervallo dato (usare il comando `linspace`).

Problema di climatologia

La temperatura dell'aria in prossimità del suolo dipende dalla concentrazione K di acido carbonico. Nel file `temp_media.m` in corrispondenza a $K = 0.67$ sono riportate le variazioni della temperatura media che si avrebbero nel globo rispetto alla temperatura media corrispondente ad un valore di riferimento dell'acido carbonico. I valori sono riferiti a diverse latitudini per `lat=-55:10:65`.

- Calcolare il polinomio di grado 4 utilizzando i dati della variazione di temperatura alle latitudini -55, -25, 5, 35, 65.
- Riportare in una figura il grafico del polinomio insieme a tutti i valori della variazione di temperatura disponibili.
- Utilizzare poi tutti i valori disponibili per calcolare il polinomio di grado 12. Confrontare il grafico ottenuto con quello del polinomio di grado 4.

Approssimazione di una funzione

Si consideri la seguente funzione $f(x) = e^x, \quad x \in [-1, 1]$.

Esercizio 4

- Interpolare con polinomi di grado `n=2:2:12`, la funzione data, usando $n+1$ punti equispaziati nell'intervallo $[-1, 1]$.
- Riportare il grafico di ciascun polinomio interpolatore insieme con quello della funzione data.
- Calcolare per ciascun valore di n l'errore commesso ossia

$$E_n = \max_{a \le x \le b} |f(x) - \Pi_n(x)|$$

Costruire un vettore contenente gli errori ottenuti per ciascun valore di n e riportare gli errori in un grafico in scala semilogaritmica `semilogy(n,E)`.

Traccia per la risoluzione dell'esercizio

1. Assegnare un vettore che contiene i valori di n.
2. Costruire il vettore `xi` dei punti per valutare tutti i polinomi.
3. Valutare la funzione in `xi` (risultato `yi`).
4. Per ogni valore di n (`for i=1:length(n)`) eseguire la seguente sequenza:
   - Costruire il vettore `x` dei nodi con il comando `x=linspace(a,b,n(i)+1)`.
   - Valutare la funzione nei nodi `y=f(x)`.
   - Trovare i coefficienti del polinomio con il comando `polyfit`.
   - Valutare il polinomio nei punti `xi` con il comando `polyval` (risultato `py`).
   - Plottare la funzione e il polinomio di grado n (inserire una pausa `pause`).
   - Calcolare l'errore

     ```
     E(i)=norm(yi-py,inf)
     ```
5. Plottare l'errore con il comando `semilogy(n,E)`.

Errore di approssimazione

Teorema: stima dell'errore di interpolazione

Dati $n+1$ nodi di interpolazione x_i per $i = 0, 1, \cdots, n$. Sia f una funzione derivabile con continuità $n+1$ volte in un intervallo I contenente tutti i nodi di interpolazione e sia Π_n il polinomio interpolatore nei nodi x_i, allora per ogni $x \in I$, esiste un punto $\xi \in I$ tale che

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Nel caso di punti equidistanti, con $x_{i+1} = x_i + h$, si ha:

$$|E_n(x)| = |f(x) - \Pi_n(x)| \leq \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)| \frac{h^{n+1}}{4(n+1)}.$$

Funzione di Runge

Si consideri la **funzione di Runge** $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].$

Esercizio 5

- Interpolare con polinomi di grado `n=2:2:12`, la funzione data, usando $n+1$ punti equispaziati nell'intervallo $[-5, 5]$.
- Riportare il grafico di ciascun polinomio interpolatore insieme con quello della funzione data.
- Calcolare per ciascun valore di n l'errore commesso ossia

$$E_n = \max_{a \le x \le b} |f(x) - \Pi_n(x)|$$

Costruire un vettore contenente gli errori ottenuti per ciascun valore di n e riportare gli errori in un grafico in scala semilogaritmica `semilogy(n,E)`.

Interpolazione di Chebyshev

Il fenomeno di Runge può essere evitato utilizzando opportune distribuzioni di nodi.
Nell'intervallo $[a,b]$ consideriamo i nodi x_i dati da:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\hat{x}_i \quad \text{con } \hat{x}_i = -\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right), \; i = 0, \ldots, n.$$

I punti $\hat{x}_i \in [-1,1]$ si dicono nodi di Chebyshev.

Teorema di Bernstein

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathbf{C}^1$. Sia Π_n il polinomio interpolatore di grado n costruito usando i nodi di Chebyshev.
Allora

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \Pi_n f\|_\infty = 0.$$

Calcolo del polinomio con nodi di Chebyshev

Esercizio 6

Calcolare il polinomio di grado 7 che interpola la seguente funzione usando 8 nodi di Chebyshev

$$f(x) = x^2 + \frac{10}{\sin(x) + 1.2} \quad x \in [-2, 8].$$

Usare la seguente istruzione per costruire i nodi di Chebyshev:

```
xc=(a+b)/2-(b-a)/2*cos(pi*(0:n)/n)
```

Funzione di Runge

Esercizio 7

Per `n=2:2:12`, eseguire le seguenti operazioni:

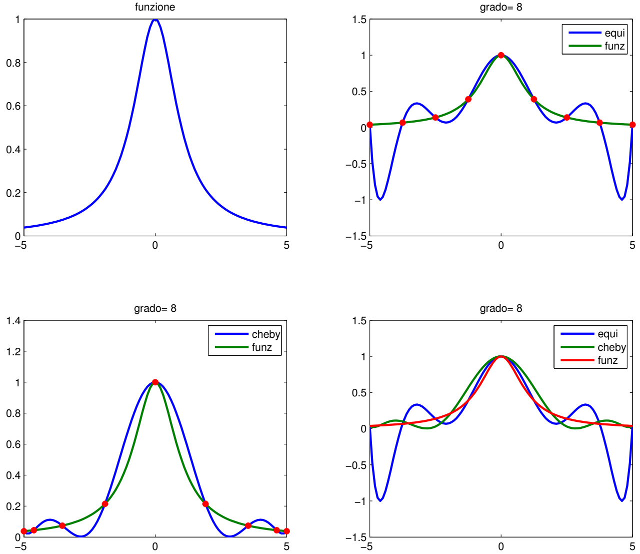
- Interpolare la funzione di Runge nell'intervallo $[-5, 5]$ con i polinomi di grado `n`, costruiti usando $n+1$ nodi di Chebyshev e $n+1$ punti equidistanti nell'intervallo $[-5, 5]$.
- Usando il comando `subplot` riportare 4 grafici contenenti rispettivamente:
  - la funzione;
  - la funzione e il polinomio interpolatore con nodi equispaziati;
  - la funzione e il polinomio interpolatore con nodi di Chebyshev;
  - la funzione e i due polinomi interpolatori.

  Si veda la figura nella pagina seguente.
- Calcolare per ciascun valore di n l'errore commesso.

Riportare gli errori per i due polinomi in uno stesso grafico in scala semilogaritmica `semilogy(n,E1,n,E2)`.

Ripetere l'esercizio usando la funzione $f(x) = sin(x)$ per $x \in [0, 2\pi]$.

Figura


funzione
grado= 8
equi
funz
grado= 8
cheby
funz
grado= 8
equi
cheby
funz

Interpolazione a tratti

Dato un'intervallo $I = [a, b]$, si introduce una partizione mediante un numero finito di punti

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b;$$

$I_k = [x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \cdots, m$ indica il k-esimo sottointervallo.

Definizione

Si definisce **polinomio a tratti** una funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che

$$g(x) = p_n(x) \quad \forall x \in I_k,$$

essendo $p_n(x)$ un polinomio di grado n.

Interpolazione lineare a tratti

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione sufficientemente regolare.

Problema

costruire un polinomio lineare a tratti che interpoli la funzione f nei nodi x_i, $i = 0, \ldots, n$.

Considериamo la partizione dell'intervallo $[x_0, x_n]$ data dai nodi x_i. Quindi su ciascun intervallino $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, \ldots, n$ il polinomio interpolatore a tratti è

$$g(x) = f(x_{i-1})\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Stima dell'errore di approssimazione

Sia $H = \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$. Sia f una funzione continua insieme alle sue derivate prima e seconda. Sia g il polinomio lineare a tratti definito prima.
Per ogni $i = 1, \cdots, n$ esiste un punto $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tale che

$$f(x) - g(x) = \frac{f''(\eta_i)}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i) \quad \text{per } x \in [x_{i-1}, x_i],$$

da cui segue la seguente maggiorazione:

$$\max_{1 \le i \le n} \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} |f(x) - g(x)| \\ \le \max_{1 \le i \le n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} |f''(x)| \le \frac{H^2}{8} \max_{a \le x \le b} |f''(x)|.$$

Spline

Siano x_i, per $i = 0, \cdots, n$, $n + 1$ nodi distinti e ordinati sull'intervallo $[a, b]$, tali che $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Definizione

La funzione $s_m : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una **funzione spline** di grado m relativa ai nodi x_i se

- $s_m(x)$ per $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$, è un polinomio di grado m.
- La funzione s_m è continua sull'intervallo $[a, b]$ insieme alle sue derivate fino all'ordine $m - 1$.

La spline più usata è la **spline cubica** s_3.

Stime dell'errore

$$\max_{x_0 \le x \le x_n} |f^{(r)}(x) - s_3^{(r)}(x)| \le C_r H^{4-r} \max_{x_0 \le x \le x_n} |f^{(4)}(x)| \quad r = 0, 1, 2$$

$$\max_{x_0 \le x \le x_n \; x \ne \{x_0, \ldots, x_n\}} |f^{(3)}(x) - s_3^{(3)}(x)| \le C_3 H \max_{x_0 \le x \le x_n} |f^{(4)}(x)|$$

Le funzioni MATLAB per l'interpolazione

Funzione	**Significato**
`interp1`	Interpolazione 1D.
`interp2`	Interpolazione 2D.
`interp3`	Interpolazione 3D.
`spline`	Spline cubica interpolante.
`pchip`	Interpolazione cubica "shape preserving"
`interpft`	Interpolazione mediante il metodo FFT.

interp1 e **spline**

```
yi=interp1(x,y,z,metodo)
```

`x, y` specificano le coordinate dei punti di interpolazione.
`z` sono i punti in cui si vuole valutare il valore interpolato.
`metodo` è una stringa di caratteri che specifica il metodo da utilizzare:

- `metodo='nearest'` si sceglie il valore nel nodo di interpolazione più vicino;
- `metodo='linear'` interpolazione lineare a tratti;
- `metodo='spline'` interpolazione con spline cubica;
- `metodo='pchip'` o `metodo='cubic'` interpolazione di Hermite cubica a tratti shape preserving.

```
s=spline(x,y,z)
```

valuta nei punti `z`, la spline cubica che passa per i punti di ascissa `x` e ordinata `y`.

Confronto fra i diversi metodi di interpolazione

Considerare i seguenti punti:

```
x=1:6;
y=[16 18 21 17 15 12];.
```

- Usare l'interpolazione polinomiale e tutti i metodi disponibili nella function `interp1` per interpolare i punti dati.
- Riportare separatamente i grafici delle funzioni ottenute insieme ai nodi marcati con un pallino. Usare il comando `subplot` per avere tutti i grafici in una stessa finestra.
- Riportare in una stessa figura il grafico ottenuto con le spline e con il metodo `pchip` (shape preserving piecewise cubic).

Esercizio

Esercizio 8

- Calcolare l'approssimazione spline e lineare a tratti relative alla funzione di Runge nell'intervallo $[-1, 1]$, usando $n + 1$ punti equidistribuiti nell'intervallo dato essendo `n=2:2:20`. Usare le function `spline` e `interp1`.
- Calcolare per ciascun valore di n l'errore commesso ossia

$$E_n = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \Pi_n(x)|$$

  Costruire un vettore contenente gli errori ottenuti per ciascun valore di n e riportare gli errori in un grafico in scala bilogaritmica `loglog(n,E)`.

Esercizio 9

- Ripetere l'esercizio 8 approssimando la funzione di Runge nell'intervallo $[-5, 5]$.
- Sempre sull'intervallo $[-5, 5]$ usare n punti invece che $n + 1$.

Shape preserving piecewise cubic

Le spline cubiche non conservano le proprietà di monotonia delle funzioni.

Esempio

Per approssimare la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1 costruire i punti di coordinate:

$$x_k = -\cos(k\pi/6), \quad y_k = \sin(k\pi/6) \qquad k = 0, 6.$$

- Calcolare la spline che interpola tali punti, in un campionamento di punti sufficientemente grande dell'intervallo $[-1, 1]$ (usare il comando `spline`).
- Riportare su una stessa figura la spline e la semicirconferenza.
- Osservato che la spline è oscillante intorno alla circonferenza, usare il comando `pchip` per generare un interpolante che conserva le proprietà di monotonia della funzione.

La function `spline`

Sono dati i vettori `x,y` contenenti le coordinate dei punti. `pp=spline(x,y)` fornisce la struttura `pp` da cui si possono estrarre le informazioni relative alla spline.

```
[breaks,coefs] = unmkpp(pp)
```

- `breaks` punti di suddivisione (vettore `x` di partenza);
- `coefs` coefficienti.

`pp = mkpp(breaks,coefs)` costruisce un polinomio a tratti.

`v = ppval(pp,z)` valuta il polinomio individuato dalla struttura `pp` nei punti `z`.

Approssimazione delle derivate

Si consideri la funzione di Runge $f(x) = 1/(1+x^2)$ per $x \in [-5, 5]$.
Suddividere l'intervallo in n parti e costruire la spline che l'approssima.
Rappresentare la funzione e la spline in uno stesso grafico.
Determinare i coefficienti corrispondenti alle derivate fino all'ordine 3 e rappresentarle insieme alla corrispondente derivata della funzione di partenza.