Metodo degli elementi finiti in una dimensione

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,
http://lucia-gastaldi.unibs.it

Indice

1. Problemi di diffusione-reazione del secondo ordine
   - Formulazione debole
   - Metodo di Galerkin
2. Elementi finiti con condizioni di Dirichlet omogenee
   - Assemblaggio della matrice e del termine noto
   - Condizioni al bordo
   - Esercizi

Problema di Dirichlet

Problema in una dimensione

Sia

- $\Omega =]a, b[$,
- $\mu \in \mathbb{R}$, con $\mu > 0$
- $\sigma \in \mathbb{R}$ tale che $\sigma \geq 0$

Trovare $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{aligned} &-(\mu u'(x))' + \sigma u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in \Omega \\ &u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{aligned}$$

Teorema

Il problema è ben posto nel senso che **esiste una ed una sola soluzione** che dipende con continuità dai dati (stabilità).

Problema con condizioni di Dirichlet omogenee

Problema

$$
\begin{array}{l}
-\mu u'' + \sigma u = f \quad \text{in } \Omega =]a, b[\\
u(a) = u(b) = 0
\end{array}
$$

Quadro funzionale

Posto

$$
\mathbf{L}^2(a,b) = \{v : (a,b) \to \mathbb{R} : \int_a^b v^2 \, dx < +\infty\}
$$

si definisce

$$
\begin{array}{l}
H^1(a,b) = \{v \in \mathbf{L}^2(a,b) : v' \in \mathbf{L}^2(a,b)\} \\
V = H_0^1(a,b) = \{v \in H^1(a,b) : v(a) = v(b) = 0\}
\end{array}
$$

Moltiplichiamo l'equazione per $v \in V$ (test function) e integriamo su (a, b):

$$\int_a^b (-\mu u''(x) + \sigma u(x))v(x)\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx$$

Integrando per parti il primo termine si ha

$$\int_a^b \mu u''(x)v(x)\,dx = \left[\mu u'(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b \mu u'(x)v'(x)\,dx$$

da cui

$$\int_a^b (\mu u'(x)v'(x) + \sigma u(x)v(x))\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx$$

Problema

Trovare $u \in V$ tale che

$$\int_a^b (\mu u'(x)v'(x) + \sigma u(x)v(x))\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in V.$$

Metodo di Galerkin

Consideriamo uno spazio di dimensione finita $V_h \subseteq V$ (h è il parametro di finezza della mesh)

Problema discreto

Trovare $u_h \in V_h$ tale che

$$\int_a^b (\mu u_h'(x) v_h'(x) + \sigma u_h(x) v_h(x))\, dx = \int_a^b f(x) v_h(x)\, dx \quad \forall v_h \in V_h.$$

Supponiamo che $V_h = \mathrm{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{N_h}\}$, quindi $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j$.

Il problema si riscrive: trovare $\underline{\mathbf{u}} = \{u_j\}$ tale che per ogni i

$$\int_a^b \left(\mu \Big(\sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j' \Big) \varphi_i' + \sigma \Big(\sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j \Big) \varphi_i \right) dx = \int_a^b f \varphi_i \, dx.$$

Metodo di Galerkin (segue)

Per la linearità degli integrali si ottiene

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j \left(\int_a^b \mu \varphi_j' \varphi_i' + \sigma \varphi_j \varphi_i \, dx \right) = \int_a^b f \varphi_i \, dx \quad i = 1, \ldots, N_h.$$

Indichiamo con K la matrice di *rigidezza* o *stiffness* e con M la matrice di *massa*, rispettivamente di elementi

$$K_{ij} = \int_a^b \varphi_j' \varphi_i' \, dx \qquad M_{ij} = \int_a^b \varphi_j \varphi_i \, dx,$$

con $\underline{\mathbf{F}}$ il vettore di *carico* con componenti

$$\underline{\mathbf{F}}_i = \int_a^b f \varphi_i \, dx.$$

Posto $A = \mu K + \sigma M$, il problema discreto è equivalente al seguente **sistema lineare**

$$A \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{F}}$$

essendo A simmetrica e definita positiva.

Stime dell'errore

Lemma

Posto

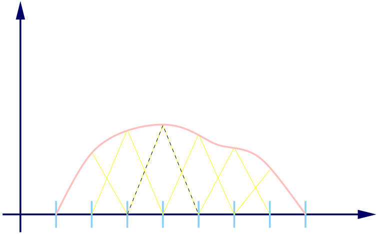
$$\|v\|_0 = \left(\int_a^b v^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad \|v\|_V = \left(\|v\|_0^2 + \|v'\|_0^2 \right)^{1/2}, \ \forall v \in V$$

vale la seguente maggiorazione

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_h} \|u - v_h\|_V .$$

L'errore è maggiorato dalla migliore approssimazione.
Occorre una buona scelta di V_h!

Elementi finiti



Approssimazione in 1D con polinomi lineari a tratti.
Funzioni di base
(shape functions): funzioni a tetto.

Un elemento finito è definito da:
1) un dominio (intervallo, triangolo, tetraedro,. . .),
2) uno spazio di dimensione finita (polinomiale),
3) un insieme di gradi di libertà d.o.f (degrees of freedom).

Elementi finiti in 1D

1) dominio: intervallo
2) spazio: $\mathbb{P}_r$
3) d.o.f.: dipendono dal grado dei polinomi
elementi lineari: estremi (2)
elementi quadratici: estremi + punto medio (3)
...

Proprietà di approssimazione

Sia $I_h u(x) = \sum_{i=1}^{N_h} u(x_i)\varphi_i(x)$ l'interpolata lineare a tratti di u allora

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_0 \le \|u - I_h u\|_0 \le C_1 h^2 \|u''\|_0$$

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u' - v_h'\|_0 \le \|u' - (I_h u)'\|_0 \le C_2 h \|u''\|_0$$

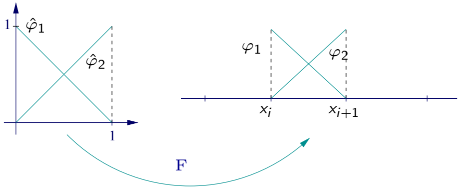
Matrici di rigidezza e di massa

Le matrici di rigidezza K e di massa M hanno la seguente struttura:

$$K = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Elemento di riferimento ed elemento corrente



$\hat{K} = [0, 1]$
elemento di riferimento
$K = I_i = [x_{i-1}, x_i]$
elemento corrente

$\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$ funzioni di base su $\hat{K}$;
φ_1, φ_2 funzioni di base su K.

$$F_K : \hat{K} \to K, \quad x = F_K(\hat{x})$$
$$\varphi(x) = \hat{\varphi}(F_K^{-1}(x))$$

Quindi

$$x = F_K(\hat{x}) = x_{i-1} + h\hat{x}.$$

Calcolo del termine noto

Si ha

$$\underline{\mathbf{F}}_i = F(\varphi_i) = \int_\Omega f(x)\varphi_i(x)dx = \sum_K \int_K f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Passando all'elemento di riferimento si ha:

$$\begin{aligned}\int_K f(x)\varphi_i(x)dx &= \int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{x}))\hat{\varphi}_i(\hat{x})F_K'(\hat{x})\,d\hat{x}\\ &= h\int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{x}))\hat{\varphi}_i(\hat{x})\,d\hat{x}\end{aligned}$$

Per il calcolo di questo integrale occorrono delle formule di quadratura appropriate in modo che l'errore introdotto nell'uso delle formule di quadratura sia di *ordine superiore* rispetto all'errore di discretizzazione. Ad esempio, si possono usare le formule di Gauss-Legendre.

Formule di Gauss - Legendre

Nella tabella qui sotto, n indica il grado dei polinomi interpolanti. I nodi $\tilde{x}_i$ e i pesi $\tilde{w}_i$ sono relativi all'intervallo $[-1, 1]$.

n	nodi $\tilde{x}_i$ $i = 0, \ldots, n$	pesi $\tilde{w}_i$ $i = 0, \ldots, n$
0	(0)	(2)
1	$(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	$(1, 1)$
2	$(-\sqrt{15}/5, 0, \sqrt{15}/5)$	$(5/9, 8/9, 5/9)$

n	G.d.P.	ordine
0	1	$CH^2 \max \lvert f^{(2)} \rvert$
1	3	$CH^4 \max \lvert f^{(4)} \rvert$
2	5	$CH^6 \max \lvert f^{(6)} \rvert$

I nodi $\hat{x}_i$ e i pesi $\hat{w}_i$ sull'intervallo $[0, 1]$ si ottengono con le trasformazioni:

$$\hat{x}_i = \frac{1 + \tilde{x}_i}{2}, \quad \hat{w}_i = \tilde{w}_i.$$

Assemblaggio del termine noto

Strategia generale:

- Ciclo sugli elementi $ie = 1, \ldots, ne$
- Calcolo del vettore termine noto locale $F_i^{loc} = F(\varphi_i)$, $i = 1, \ldots, ndof$
- Ciclo sui gradi di libertà locali $i = 1, \ldots, ndof$ e assemblaggio del termine noto globale $F_{iglob} = F_{iglob} + F_i^{loc}$
- Imposizione delle condizioni al bordo

Condizioni di Dirichlet omogenee

Il vettore del termine noto con questa costruzione ha due elementi in più corrispondenti alle funzioni di base associate agli estremi dell'intervallo.

$$\underline{\mathbf{F}}_{prima} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Basta eliminare la prima e l'ultima componente:

$$\underline{\mathbf{F}}_{dopo} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

Function per la soluzione con elementi finiti

```
[x,u]=femP1(mu,sigma,f,a,b,N)
```

Input

`mu, sigma`	coefficienti
`f`	funzione al secondo membro
`a,b`	estremi dell'intervallo
`N`	numero di punti interni

Output

`x`	punti della mesh
`u`	valori della soluzione

Passi principali

- Funzioni di base sull'elemento di riferimento `shape.m`
- Costruzione della mesh
  - calcolare h
  - costruire il vettore dei punti di suddivisione
- Costruzione della matrice e del termine noto
  - costruire le matrici `K, M` in formato sparse
  - costruire il termine noto `carico.m`
    Ciclo sugli elementi
    - calcolare il termine noto locale
    - assemblare il termine noto globale
- Condizioni al bordo
- Soluzione del sistema lineare
- Output `x,u`

Errore

Conoscendo la soluzione esatta, la function `errore` fornisce le due quantità:

$$\|u - u_h\|_0 \qquad \|u' - u_h'\|_0.$$

```
[E0,E1]=errore(u,a,b,esatta,desatta,N)
```

Input

`u`	vettore soluzione
`a,b`	estremi dell'intervallo
`esatta, desatta`	espressioni analitiche della soluzione esatta e della sua derivata
`N`	numero degli intervalli

Output

`E0`	errore in L^2 della soluzione
`E1`	errore in L^2 della derivata

Esercizio 1

Si consideri l'equazione differenziale

$$-u'' = f \quad x \in (0,1) \qquad u(0) = u(1) = 0$$

essendo f una delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = 2 & f_2(x) = -12x^2 + 12x - 2 \\ f_3(x) = 4\pi^2 \sin(2\pi x) & f_4(x) = e^x(1+x) \end{array}$$

Risolvere l'equazione differenziale con elementi finiti lineari usando la function `femP1` al variare di `N=[10 20 40 80 160 320]`.
Calcolare l'errore relativo in norma L^2 sia della funzione che della derivata usando la function `errore`. Calcolare inoltre l'errore relativo in norma euclidea di $\mathbb{R}^{N+1}$ del vettore soluzione rispetto ai valori della soluzione esatta nei nodi.
Riportare opportunamente i risultati in scala bilogaritmica.

Soluzioni dell'esercizio 1

La soluzione esatta dell'equazione differenziale dell'esercizio 1 ha la seguente espressione analitica:

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= x(1-x)\\
u_2(x) &= x^2(1-x)^2\\
u_3(x) &= \sin(2\pi x)\\
u_4(x) &= (e^x-1)(1-x)
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

Si consideri l'equazione differenziale

$$-u'' + u = f \quad x \in (0,1) \qquad u(0) = u(1) = 0$$

essendo f calcolata in maniera opportuna in modo che la soluzione esatta sia la stessa dell'esercizio 1. Risolvere l'equazione differenziale con elementi finiti lineari usando la function `femP1` al variare di `N=[10 20 40 80 160 320]`.
Calcolare l'errore relativo in norma L^2 sia della funzione che della derivata usando la function `errore`. Calcolare inoltre l'errore relativo in norma euclidea di $\mathbb{R}^{N+1}$ del vettore soluzione rispetto ai valori della soluzione esatta nei nodi.
Riportare opportunamente i risultati in scala bilogaritmica.

Esercizio 3

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$-u''(x) = f(x) \quad x \in (-1, 1), \qquad u(-1) = u(1) = 0$$

essendo $f(x) = \alpha(\alpha - 1)|x|^{\alpha-2}$.
La soluzione esatta è: $u(x) = 1 - |x|^{\alpha}$.
Si considerino i seguenti valori $\alpha = 3, 2, 5/3, 3/2, 5/4$.
Plottare la soluzione insieme alla soluzione esatta.
Plottare gli errori in norma L^2 sia della funzione che della derivata e determinare l'ordine di convergenza.

Perturbazione singolare

$$-\varepsilon u'' + u = 1 \quad x \in [0,1] \qquad u(0) = u(1) = 0$$

Soluzione:

$$u = \frac{\sinh\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sinh\left(\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}$$

- Si consideri $\varepsilon =$1e-1,1e-3,1e-5 e si calcoli la soluzione per $N = 10$ e la si confronti con la soluzione esatta.
- Per $\varepsilon =$1e-3,1e-5 si possono osservare oscillazioni indesiderate. Trovare il più piccolo N multiplo di 10 per cui le soluzioni numeriche non presentano oscillazioni nei due casi.
- Gli elementi della matrice del sistema sono dati da:

$$A_{ii} = \frac{2\varepsilon}{h} + \frac{2h}{3}, \quad A_{i\,i-1} = A_{i\,i+1} = -\frac{\varepsilon}{h} + \frac{h}{6}$$

Verificare che le oscillazioni si verificano fintanto che $A_{i\,i-1} = A_{i\,i+1} > 0$.