Integrazione numerica

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,
http://lucia-gastaldi.unibs.it

Indice

Integrazione di funzioni

Problema

Data la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, si calcoli il valore dell'integrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Una **formula di quadratura** ci permette di ottenere un valore approssimato dell'integrale della funzione a partire dai valori di f come segue:

$$\mathcal{I}(f; a, b) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i).$$

I punti x_i si dicono **nodi**;
i coefficienti ω_i si dicono **pesi**.

Grado di precisione della formula di quadratura

Definizione

Si dice che una **formula di integrazione numerica** ha **grado di precisione** p se vale che

$$\begin{array}{l} I(f) = \mathcal{I}(f) \text{ per ogni polinomio } f \text{ di grado } \leq p; \\ I(f) \neq \mathcal{I}(f) \text{ per ogni polinomio } f \text{ di grado } > p. \end{array}$$

Formula del punto medio

Nodi: punto medio dell'intervallo $(a+b)/2$

Formula del punto medio

$$\mathcal{I}_{PM}(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Grado di precisione: 1

Formula composita del punto medio

$$\mathcal{I}^c_{PM}(f) = H \sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) \quad \text{essendo } H = \frac{b-a}{N}.$$

Errore: $E^c_{PM}(f) = I(f) - \mathcal{I}^c_{PM}(f) = \frac{b-a}{24} H^2 f''(\xi_0)$

Formula dei trapezi

Nodi: gli estremi dell'intervallo a, b.

Formula dei trapezi

$$\mathcal{I}_T(f) = \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right).$$

Grado di precisione: 1

Formula composita dei trapezi

$$\mathcal{I}_T^c(f) = H\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2}\right) \quad \text{essendo } H = \frac{b-a}{N}.$$

Errore: $E_T^c(f) = I(f) - \mathcal{I}_T^c(f) = -\frac{b-a}{12} H^2 f''(\xi_0)$

Formula di Cavalieri-Simpson

Nodi: gli estremi ed il punto medio dell'intervallo a, b, $(a+b)/2$.

Formula di Cavalieri-Simpson

$$\mathcal{I}_{CS}(f) = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Grado di precisione: 3

Formula composita di Cavalieri-Simpson

$$\mathcal{I}^c_{CS}(f) = \frac{H}{6}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + 4\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) + f(b)\right)$$

Errore: $E^c_{CS}(f) = I(f) - \mathcal{I}^c_{CS}(f) = -\frac{b-a}{180}\frac{H^4}{16}f^{(4)}(\xi_0)$

Formule di Gauss - Legendre

Nella tabella qui sotto, n indica il grado dei polinomi interpolanti.

n	nodi $\hat{x}_i$ $i = 0, \dots, n$	pesi w_i $i = 0, \dots, n$
0	(0)	(2)
1	$(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	$(1, 1)$
2	$(-\sqrt{15}/5, 0, \sqrt{15}/5)$	$(5/9, 8/9, 5/9)$

n	G.d.P.	ordine
0	1	$CH^2 \max \lvert f^{(2)} \rvert$
1	3	$CH^4 \max \lvert f^{(4)} \rvert$
2	5	$CH^6 \max \lvert f^{(6)} \rvert$

Formula composita di Gauss

$$\mathcal{I}_G^c(f) = \frac{H}{2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_{ki}) \quad H = \frac{b-a}{N}$$

essendo $x_{ki} = x_{k-1} + \frac{H}{2}(1 + \hat{x}_i)$.

Formule di Gauss - Legendre - Lobatto

n	nodi $\hat{x}_i$ $i = 0, \dots, n$	pesi w_i $i = 0, \dots, n$
1	$(-1, 1)$	$(1, 1)$
2	$(-1, 0, 1)$	$(1/3, 4/3, 1/3)$
3	$(-1, -\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5, 1)$	$(1/6, 5/6, 5/6, 1/6)$

n	G.d.P.	ordine
1	1	$CH^2 \max\|f^{(2)}\|$
2	3	$CH^4 \max\|f^{(4)}\|$
3	5	$CH^6 \max\|f^{(6)}\|$

Formula composita di Gauss

$$\mathcal{I}_G^c(f) = \frac{H}{2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_{ki}) \quad H = \frac{b-a}{N}$$

essendo $x_{ki} = x_{k-1} + \frac{H}{2}(1 + \hat{x}_i)$.

Function **quadratura**

La function **quadratura** calcola il valore approssimato dell'integrale di una funzione mediante le formule composite. Per usare la function dare il comando:

```
[I] =quadratura(f,a,b,N,metodo)
```

Input `f` nome della funzione da integrare;
`a,b` estremi dell'intervallo;
`N` numero degli intervalli di suddivisione;
`metodo`=1 uso punto medio;
`metodo`=2 uso trapezi;
`metodo`=3 uso Simpson.

Esercizio

Testare la function `quadratura` calcolando gli integrali:

$$\int_{-1}^{2} x^4\,dx = \frac{33}{5}, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = 2, \quad \int_{0}^{1} e^x\,dx = e-1.$$

Esercizio

Esercizio 1

Scrivere un programma di tipo script per valutare al variare di N (numero degli intervallini di suddivisione) e del metodo usato, l'errore di integrazione $E_{metodo,N}$

$$E_{metodo,N} = |I(f) - I_{metodo,N}(f)|.$$

Riportare in un grafico in scala bilogaritmica l'errore in funzione di N. Testare il programma utilizzando gli integrali dati precedentemente.
L'ordine di convergenza è in accordo con la stima teorica dell'errore?

Rappresentazione dell'ordine di convergenza

Supponiamo che la stima dell'errore per un certo metodo sia

$$E(H) \approx CH^p \quad \text{essendo } H = (b-a)/N.$$

Per rappresentare il valore di p, calcoliamo il logaritmo ad entrambi i membri, ottenendo:

$$\log E(H) \approx \log C + p \log H.$$

Quindi il grafico di $\log E(H)$ in funzione di $\log H$ è una retta con coefficiente angolare pari a p.

Poiché si ha che $\log H = \log(b-a) - \log N$, il grafico dell'errore in funzione di N, è una retta con coefficiente angolare uguale a $-p$.

- `loglog(N,E)` produce il grafico di $\log E(H)$ in funzione di $\log N$.
- `loglog(H,E)` produce il grafico di $\log E(H)$ in funzione di $\log H$.

Per verificare il valore di p, confrontare l'andamento di $\log E(H)$ con quello di $p \log N$ con il comando `loglog(N,E,N,1./N.^p)`.

Traccia dell'esercizio

1. Assegnare la funzione `f`, gli estremi dell'intervallo `a` e `b` ed il valore esatto dell'integrale `If`.
2. Assegnare il vettore `N=[10,20,40,80,160,320,640]`.
3. Per ciascun metodo (`for metodo=1:3`):
   - Per ciascun valore di `N` (`for i=1:length(N)`):
     - Calcolare il valore dell'integrale approssimato `Iapprox`.
     - Calcolare l'errore relativo: `E(metodo,i)=abs(If-Iapprox)/abs(If)`.
4. Plottare gli errori in scala bilogaritmica per ciascun metodo confrontandoli con le stime teoriche: `loglog(N,E,N,1./N.^2,N,1./N.^4)`

Function `quadGL` e `quadGLL`

Le function `quadGL` e `quadGLL` permettono di calcolare l'integrale di una funzione usando le formule di quadratura di Gauss-Legendre e di Gauss-Legendre-Lobatto rispettivamente.

Esercizio facoltativo

Ripetere l'esercizio precedente usando le formule di quadratura gaussiane.

Effetto della regolarità della funzione

Esercizio 2

Per $\alpha = n + 1/3$ si calcoli l'integrale

$$\int_0^3 |x^2 - 5|^\alpha dx$$

usando le formule di integrazione numerica implementate nella function `quadratura`. Per ciascuna formula individuare il valore di n per il quale la formula di integrazione numerica converge con l'ordine previsto dalla teoria.
Per calcolare l'errore usare come valore esatto quello fornito con il seguente comando di Matlab

```
quad(f,a,b,1e-13)
```

L'integrazione numerica con MATLAB

Funzione	Significato
quad	Formula di Simpson adattativa.
quadl	Formula di Gauss-Lobatto adattativa.
quadgk	Quadratura adattiva Gauss-Kronrod funziona anche su intervalli illimitati
dblquad	Formula di quadratura per integrali doppi su rettangoli.
trapz	Calcola l'approssimazione di un integrale con la formula dei trapezi.

Indicazioni per l'uso

`quad` è più efficiente se usata con minore accuratezza per funzioni non regolari.
`quadl` è più efficiente di `quad` con elevata accuratezza per funzioni regolari.

quad, quadl

Sia `f` il nome della funzione di tipo `@`.

Calcolo di $\int_a^b f(x)dx$

`>> q=quad(f,a,b)` formula di Simpson adattativa;
`>> q=quadl(f,a,b)` formula di Gauss-Lobatto adattativa;

`q=quadl(f,a,b,tol)`

modifica il valore della tolleranza usata (default `1.e-6`).

`[q,fcnt]=quadl(f,a,b)`

restituisce il numero di valutazioni della funzione.

`[q,fcnt]=quadl(f,a,b,[],trace)`

se `trace` assume un valore diverso da zero, vengono mostrati i valori di `[fcnt a b-a Q]` durante il procedimento. Le parentesi `[]` servono per tenere il posto della tolleranza ed usare il suo valore di default.

Function **trapz**

```
Z = trapz(X,Y)
```

calcola l'integrale di una funzione data per punti essendo `X` il vettore delle ascisse e `Y` il vettore dei corrispondenti valori della funzione.

Formule adattative

Il passo di integrazione H può essere scelto in modo da garantire che l'errore sia inferiore ad una tolleranza ε prestabilita.
Se usiamo la formula di Simpson si dovrebbe trovare H tale che

$$\frac{b-a}{180}\frac{H^4}{16}M < \varepsilon, \qquad \text{essendo } M = \max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|$$

La funzione $\arctan(ax)$

Sia $f(x) = \arctan(ax)$, allora si ha

$$f^{(4)}(x) = -\frac{24a^7x^3 - 24a^5x}{(a^2x^2+1)^4}$$

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = \left[x\arctan(ax) - \frac{1}{2a}\log(a^2x^2+1)\right]_{-1}^{5}$$

Esercizio 3

- Per $a = 1$ ed $a = 10$, fare il grafico della funzione $f(x) = \arctan(ax)$ e della sua derivata quarta sull'intervallo $[-1, 5]$ in due figure differenti.
- Determinare numericamente

  $$M = \max_{-1 \leq x \leq 5} |f^{(4)}(x)|$$

  e trovare il valore di H per cui l'errore è minore di `tol=1.e-6` per $a = 1$ e $a = 10$.
- Calcolare il valore dell'integrale usando la formula di Cavalieri-Simpson composita con il valore di H trovato al punto precedente.
- Confrontare l'errore relativo ottenuto ed il numero di valutazioni della funzione effettuate con quelli dati dalla funzione `quad` di Matlab.
- Calcolare l'errore che si ottiene usando il metodo di Cavalieri-Simpson con lo stesso numero di valutazioni della funzione richiesto da `quad`.