Equazione del calore

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sezione di Matematica,
http://lucia-gastaldi.unibs.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Indice

Equazione del calore

Sia Ω un dominio aperto e regolare, si vuole determinare la distribuzione di temperatura $u(\mathbf{x}, t)$ che soddisfa la seguente equazione:

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \mathrm{div}(\mu \nabla u(\mathbf{x}, t)) = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega,\ 0 < t \leq T \\
u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) & x \in \partial\Omega,\ 0 < t \leq T \\
u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & x \in \Omega
\end{array}
$$

essendo $\mu = k/\rho c$ il coefficiente di diffusione termica (k conducibilità termica, ρ densità di massa, c capacità di calore specifico) e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Formulazione variazionale

Supponiamo $g = 0$.
Sia $V = \{v : \int_\Omega (v^2 + |\nabla v|^2) d\mathbf{x} < +\infty, v = 0 \text{ su } \partial\Omega\}$.
Moltiplichiamo l'equazione del calore per v e integriamo per parti:

Problema continuo

Per ogni $t \in [0, T]$, trovare $u(t) \in V$ tale che

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \mu \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x}, t) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$
$$= \int_\Omega f(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall v \in V$$

$u(0) = u_0$.

Semidiscretizzazione con elementi finiti

Consideriamo una reticolazione regolare $\mathcal{T}_h$ di Ω ottenuta suddividendo Ω in triangoli e consideriamo lo spazio degli elementi finiti lineari a tratti, ossia

$$V_h = \{v \in V : v|_T \in P^1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Poniamo $h = \max_T h_T$, essendo h_T il diametro dell'elemento $T \in \mathcal{T}_h$.

Problema semidiscreto

Per ogni $t \in [0, T]$, trovare $u_h(t) \in V_h$ tale che

$$\int_\Omega \frac{\partial u_h}{\partial t}(t) v_h d\mathbf{x} + \int_\Omega \mu \nabla u_h(t) \nabla v_h d\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x}, t) v_h d\mathbf{x} \ \forall v_h \in V_h$$
$$u_h(0) = u_{0,h},$$

essendo $u_{0,h} \in V_h$ un'approssimazione di u_0.

Derivazione sistema di equazioni differenziali ordinarie

Indicando con φ_i le funzioni di base, la soluzione si scrive

$$u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)\varphi_j(x).$$

Sia $\mathbf{u}_h(t)$ la funzione a valori vettoriali le cui componenti sono date da $\alpha_j(t)$, sostituendo nel problema discreto e prendendo $v_h = \varphi_i$ si ottiene:

$$\begin{aligned} & M\mathbf{u}_h'(t) + K\mathbf{u}_h(t) = \mathbf{F}(t), \quad t \in [0,T] \\ & \mathbf{u}_h(0) = \mathbf{u}_{0,h}. \end{aligned}$$

essendo M la matrice di massa, K la matrice di rigidezza e $\mathbf{F}$ il termine noto definiti come segue:

$$M_{ij} = \int_\Omega \varphi_j\varphi_i d\mathbf{x} \quad K_{ij} = \int_\Omega \mu\nabla\varphi_j\nabla\varphi_i d\mathbf{x} \quad \mathbf{F}_i(t) = \int_\Omega f(x,t)\varphi_i d\mathbf{x}.$$

Infine $u_{0,h}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N u_0(\mathbf{x}_j)\varphi_j(\mathbf{x})$, interpolata di $\mathbf{u}_0$.

θ-metodo

Posto $\Delta t = T/M$ passo di discretizzazione in tempo,
$t_n = n\Delta t$, $\mathbf{u}_h^n \approx \mathbf{u}_h(t_n)$.

θ-metodo

Per $0 \leq \theta \leq 1$, si calcola

$$\mathbf{u}_h^{n+1} = \mathbf{u}_h^n + \Delta t\left(\theta K \mathbf{u}_h^{n+1} + (1-\theta) K \mathbf{u}_h^n)\right) + \Delta t\left(\theta \mathbf{F}^{n+1} + (1-\theta)\mathbf{F}^n\right)$$
$$\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{u}_{0,h}.$$

Quindi la soluzione si calcola risolvendo ad ogni passo temporale il sistema:

$$(M+\theta\Delta t K)\mathbf{u}_h^{n+1} = (M-(1-\theta)\Delta t K)\mathbf{u}_h^n + \Delta t\left(\theta \mathbf{F}^{n+1} + (1-\theta)\mathbf{F}^n\right)$$

Proprietà del θ-metodo

Per $\theta = 0$ si ha il metodo di Eulero esplicito.
Per $\theta = 1$ si ha il metodo di Eulero implicito.
Per $\theta = 1/2$ si ha il metodo di Crank-Nicolson.

Ordine: il metodo è del primo ordine per $\theta \neq 1/2$, ed è del secondo ordine per $\theta = 1/2$.

Assoluta stabilità:
per $\theta \geq 1/2$ il metodo è incondizionatamente assolutamente stabile;
per $\theta < 1/2$ si ha la condizione

$$\Delta t \leq \frac{2}{(1 - 2\theta)\lambda_{h,\max}}$$

dove $\lambda_{h,\max}$ è il massimo autovalore della matrice $M^{-1}K$.
Si dimostra che $\lambda_{h,\max} \approx 1/h^2$.

Risoluzione dell'equazione del calore con `pdetool`

- Ripetere gli stessi passi utilizzati per il caso stazionario per definire la geometria e le condizioni al bordo.
- Specificare il tipo di equazione differenziale, assegnando i dati dei coefficienti e del termine noto.
- Costruire la mesh.
- Nel menù **Solve** selezionare *Parameters*. Assegnare gli istanti di tempo nella casella *Time* e la condizione iniziale nella casella `u(t0)`. Poi si risolve.
- Nel menù **Plot** è possibile selezionare *Animation*.

Esercizio 1

Risolvere la seguente equazione del calore:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}\left(\frac{1}{2\pi^2}\nabla u\right) = 0 \quad \in \Omega = (0,1)\times(0,1),\ 0 \le t \le 5$$
$$u(t) = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, 0 \le t \le 5$$
$$u(x,y,0) = \sin(\pi x)\sin(\pi y) \quad (x,y) \in \Omega$$

La soluzione esatta è: $u(x,y,t) = e^{-t}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$.

Esercizio 2

Consideriamo una piastra quadrata di alluminio di densità $\rho = 2700\ Kg/m^3$, di capacità di calore specifico $c = 897 J/(kgK)$, di lato 3 metri e dotata di conducibilità termica pari a $k = 273\ W/mK$ (Watt per Kelvin-metri).
Si vuole studiare l'evoluzione della temperatura nella barra partendo dalla condizione iniziale $T(x, y, 0) = 500\ K$ se (x, y) appartiene al quadrato di lato 1 al centro della piastra e $250\ K$ altrimenti. Le condizioni al bordo sono $T(t) = 250\ K$.
Calcolare la soluzione nell'intervallo $(0, 2000)$ con passo temporale $\Delta t = 0.25$.