

Equazioni differenziali con valori al bordo

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,
<http://lucia-gastaldi.unibs.it>



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BRESCIA

- 1 Equazioni di diffusione reazione
- 2 Equazioni di diffusione trasporto

Equazioni di diffusione reazione

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} -\mu u''(x) + \sigma(x)u(x) &= f(x) \quad \text{per } x \in (a, b) \\ u(a) &= \alpha, \quad u(b) = \beta, \end{aligned}$$

essendo $\mu > 0$, σ e f funzioni continue sull'intervallo (a, b) .

Teorema

Se $\sigma(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora esiste una ed una sola soluzione dell'equazione differenziale con valori ai limiti.

Discretizzazione con differenze finite

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $N + 1$ parti uguali e poniamo $h = (b - a)/(N + 1)$. Poniamo poi $x_i = a + ih$.

Possiamo approssimare la derivata seconda con la **differenza finita del secondo ordine**

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} \quad \text{per } i = 1, \dots, N.$$

Indicando con u_i^h il valore approssimato di $u(x_i)$, si ottiene il seguente sistema lineare:

$$-\mu \frac{u_{i+1}^h - 2u_i^h + u_{i-1}^h}{h^2} + \sigma(x_i)u_i^h = f(x_i) \quad \text{per } i = 1, \dots, N$$

$$u_0^h = \alpha \quad u_{N+1}^h = \beta$$

Equazioni differenziali con valori ai limiti II

Quindi si ricava la soluzione u_i^h per $i = 1, \dots, N$ risolvendo il sistema

$$Au^h = F$$

essendo A la matrice tridiagonale che ha i seguenti elementi

$$a_{ii} = 2\mu/h^2 + \sigma(x_i), \quad a_{ii-1} = a_{ii+1} = -\mu/h^2$$

e il termine noto è dato da

$$F_1 = f(x_1) + \mu\alpha/h^2,$$

$$F_i = f(x_i) \text{ per } i = 2, \dots, N-1,$$

$$F_N = f(x_N) + \mu\beta/h^2.$$

Stima dell'errore

$$\max_{1 \leq i \leq N} |u(x_i) - u_i^h| \leq Ch^2 \max_{a \leq x \leq b} |u^{(4)}(x)|$$

Costruzione della matrice

La matrice A si può decomporre nella somma $A = K + M$ essendo

$$K = \frac{\mu}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \sigma(x_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma(x_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \sigma(x_N) \end{bmatrix}$$

Costruzione del termine noto

Il termine noto può essere ottenuto come la somma di due vettori $F = \tilde{F} + bc$: \tilde{F} tiene conto del dato f sull'intervallo, mentre bc è relativo alle condizioni al bordo.

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ \dots \\ f(x_N) \end{bmatrix} \quad bc = \begin{bmatrix} \mu\alpha/h^2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \mu\beta/h^2 \end{bmatrix}$$

Dal punto di vista pratico non è necessario costruire il vettore bc , ma basta sommare alla prima e ultima componente di F il contributo derivante dalle condizioni al bordo.

Soluzione dell'equazione differenziale

Scrivere la function `eqlim` per calcolare la soluzione dell'equazione differenziale con valori ai limiti

$$-\mu u''(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in [a, b]$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.$$

mediante il seguente comando:

```
[x,u]=eqlim(f,sigma,mu,a,b,alfa,beta,N)
```

Input

- `f,sigma` nome delle function_handle che contengono l'espressione analitica di f e σ
- `mu` coefficiente davanti alla derivata seconda
- `a,b` estremi dell'intervallo
- `alfa,beta` valori ai limiti
- `N` numero di punti in cui si calcola la soluzione

Output

- `x` ascisse dei punti in cui si calcola la soluzione
- `u` valori della soluzione

Function eqlim

La function `eqlim` si compone di 5 passi:

- ▶ assegnazione della griglia di calcolo: calcolo h e i punti $x_i = a + ih$ per $i = 1, \dots, N$;
- ▶ costruzione della matrice A come suggerito usando i comandi `ones` e `diag`;
- ▶ costruzione del termine noto (attenzione al nome);
- ▶ risoluzione del sistema lineare;
- ▶ organizzazione dell'output che tenga conto delle condizioni al bordo.

Oss Si possono completare i vettori x e u con i valori negli estremi dell'intervallo. Per fare ciò si devono aggiungere le rispettive componenti all'inizio ed alla fine del vettore, con i comandi

- ▶ $x = [a, x, b]$ se x è un vettore riga;
- ▶ $u = [alfa; u; beta]$ se u è un vettore colonna.

Esercizio 1

Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{aligned}
 -u''(x) + \sin x u(x) &= (1 - \cos^2 x - 2 \cos x)e^x \quad \text{per } x \in [0, \pi] \\
 u(0) = u(\pi) &= 0.
 \end{aligned}$$

Confrontare i risultati ottenuti con la soluzione esatta

$$u(x) = \sin x e^x.$$

Scrivere un file di tipo script che:

- ▶ assegna i dati, in particolare le funzioni f e σ di tipo @;
- ▶ calcola la soluzione usando la function `eqlim`;
- ▶ plotta la soluzione discreta insieme a quella continua;
- ▶ calcola l'errore

$$E = \max_{1 \leq i \leq N} |u(x_i) - u_i^h|.$$

Errore Per calcolare l'errore usare il comando `norm` (si veda il file `matrici.pdf`).

Convergenza del metodo delle differenze finite

Esercizio 2

Dato $N=[10 \ 20 \ 40 \ 80 \ 160 \ 320]$, per ciascun valore di N

- ▶ calcolare la soluzione dell'equazione differenziale dell'esercizio precedente;
- ▶ riportare la soluzione in un grafico insieme alla soluzione esatta;
- ▶ valutare l'errore.

Alla fine riportare gli errori in funzione di h e di N in un grafico in scala bilogarithmica insieme all'andamento teorico.
Calcolare l'ordine di convergenza del metodo.

Rappresentazione dell'ordine di convergenza

Supponiamo che la stima dell'errore per un certo metodo sia

$$E(h) \approx Ch^p \quad \text{essendo } h = (b - a)/(N + 1).$$

Per rappresentare il valore di p , calcoliamo il logaritmo ad entrambi i membri, ottenendo:

$$\log E(h) \approx \log C + p \log h.$$

Quindi il grafico di $\log E(h)$ in funzione di $\log h$ è una retta con coefficiente angolare pari a p .

Per un confronto con l'ordine di convergenza teorico p , usare il comando `loglog(h,E,h,h.^p)`.

Poiché si ha che $\log h = \log(b - a) - \log(N + 1)$, il grafico dell'errore in funzione di N , è una retta con coefficiente angolare uguale a $-p$.

`loglog(N,E)` produce il grafico di $\log E(h)$ in funzione di $\log N$.

Per un confronto con l'ordine di convergenza teorico p , usare il comando `loglog(N,E,N,1./N.^p)`.

Calcolo dell'ordine di convergenza

Vogliamo determinare il valore p in modo che l'errore sia dato da

$$E(h) \approx Ch^p \quad \text{essendo } h = (b - a)/(N + 1).$$

La relazione dipende quindi da due quantità incognite C e p .

Valutiamo l'espressione dell'errore per due diversi valori di h , h_1 e h_2 :

$$E(h_1) \approx Ch_1^p, \quad E(h_2) \approx Ch_2^p$$

Dividiamo la prima relazione per la seconda, per eliminare C :

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \approx \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^p ;$$

p si ottiene prendendo i logaritmi ad entrambi i membri:

$$\log \frac{E(h_1)}{E(h_2)} \approx p \log \frac{h_1}{h_2}$$

da cui

$$p = \frac{\log E(h_1) - \log E(h_2)}{\log h_1 - \log h_2}$$

Svolgimento dell'Esercizio 2

Scrivere un file di tipo script per eseguire i seguenti passi.

- ▶ Assegnare i dati: f , σ , a , b , α , β e la soluzione esatta sol .
- ▶ Assegnare $N=[10\ 20\ 40\ 80\ 160\ 320]$.
- ▶ Usando un ciclo `for` per ciascun valore di N :
 - ▶ calcolare la soluzione u , usando la function `eqlim`;
 - ▶ valutare la soluzione esatta nei punti della griglia;
 - ▶ riportare in uno stesso grafico la soluzione esatta e quella discreta;
 - ▶ calcolare l'errore con il comando `norm(u-sol,inf)` costruire un vettore E che contiene i valori dell'errore per ciascun valore di N .
- ▶ Riportare gli errori in funzione di h in un grafico in scala bilogarithmica: `loglog(h,E)`.
- ▶ Calcolare l'ordine del metodo con il comando:


```
p=(log(E(2:end))-log(E(1:end-1)))./...
      (log(h(2:end))-log(h(1:end-1)))
```

Il comando **pause** interrompe l'esecuzione. Si inserisce prima della fine del ciclo in modo da visualizzare il grafico ottenuto.

Esercizio 3

Dato $q \geq 2$, si consideri l'equazione differenziale

$$-u''(x) = q(q-1)|x|^{q-2} \text{ per } x \in (-1, 1), \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

La soluzione è data dalla funzione $u(x) = 1 - |x|^q$.

Calcolare l'ordine di convergenza del metodo delle differenze finite in corrispondenza ai seguenti valori di q :

$$q = 2, 2.5, 3, 3.5, 4.$$

Usare le seguenti scelte per N :

$$N = [4 \ 8 \ 16 \ 32 \ 64 \ 128 \ 256 \ 512];$$

$$N = [4 \ 8 \ 16 \ 32 \ 64 \ 128 \ 256 \ 512] + 1;$$

Cosa succede se $q < 2$? Per esempio per $q = 3/2$? o per $q = 1$?

Esercizio 4

Si consideri l'equazione differenziale

$$-u''(x) = 12x^2 \text{ per } x \in (-1, 1) \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

La soluzione è $u(x) = 1 - x^4$.

Calcolare la soluzione con il metodo delle differenze finite in corrispondenza dei seguenti valori di N

$N = [10 \ 20 \ 40 \ 80 \ 160 \ 320 \ 640 \ 1280]$;

$N = [N \ 2500 \ 5000 \ 10000 \ 20000 \ 40000 \ 80000 \ 1.e5 \ 1.2e5 \ 1.5e5]$;

Valutare per ciascun valore di N l'errore relativo e riportare gli errori in funzione di N in un grafico in scala bilogarithmica insieme all'andamento teorico.

Modificare la costruzione della matrice usando il comando `spdiags` per matrici sparse.

Equazioni di diffusione trasporto

Si consideri l'equazione differenziale

$$-\mu u''(x) + \eta(x)u'(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in [a, b]$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.$$

Per approssimare la derivata prima si possono usare le seguenti **differenze finite** ($h > 0$):

diff. finita centrata $u'(\bar{x}) \approx \delta u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x} - h)}{2h}$

diff. finita all'indietro $u'(\bar{x}) \approx \delta^- u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h}$

diff. finita in avanti $u'(\bar{x}) \approx \delta^+ u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h}$

Risoluzione con differenze finite centrate

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $N + 1$ parti uguali e poniamo $h = (b - a)/(N + 1)$. Poniamo poi $x_i = a + ih$ e $u_i^h \approx u(x_i)$. Usando le **differenze finite centrate** si ottiene il seguente sistema lineare:

$$-\mu \frac{u_{i-1}^h - 2u_i^h + u_{i+1}^h}{h^2} + \eta(x_i) \frac{u_{i+1}^h - u_{i-1}^h}{2h} + \sigma(x_i) u_i^h = f(x_i)$$

per $i = 1, \dots, N$

$$u_0^h = \alpha, \quad u_{N+1}^h = \beta$$

Risoluzione con differenze finite centrate II

Quindi si ricava la soluzione u_i^h per $i = 1, \dots, N$ risolvendo il sistema

$$Au^h = F$$

essendo A la matrice tridiagonale che ha i seguenti elementi

$$a_{ii} = 2\mu/h^2 + \sigma(x_i), \quad a_{ii-1} = -\mu/h^2 - \eta(x_i)/2h,$$

$$a_{ii+1} = -\mu/h^2 + \eta(x_i)/2h$$

e il termine noto è dato da

$$F_1 = f(x_1) + (\mu/h^2 + \eta(x_1)/2h)\alpha,$$

$$F_i = f(x_i) \text{ per } i = 2, \dots, N-1,$$

$$F_N = f(x_N) + (\mu/h^2 - \eta(x_N)/2h)\beta.$$

Function bvp

La function `bvp` serve per calcolare la soluzione dell'equazione differenziale con valori ai limiti

$$-\mu u''(x) + \eta u'(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in [a, b]$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.$$

essendo $\eta \in \mathbb{R}$.

`[x,u]=bvp(f,sigma,eta,mu,a,b,alfa,beta,N,DF)`

`f,sigma` nome delle function_handle che contengono l'espressione analitica di f e σ

`eta` coefficiente davanti alla derivata prima

`mu` coefficiente davanti alla derivata seconda

Input `a,b` estremi dell'intervallo

`alfa,beta` valori ai limiti

`N` numero di punti in cui si calcola la soluzione

`DF` sceglie quale differenza finita usare

`DF=0` centrate, `DF=1` in avanti, `DF=-1` all'indietro

Output

`x` ascisse dei punti in cui si calcola la soluzione

`u` valori della soluzione

Function bvp

Per utilizzare differenze finite centrate, si deve modificare la function `eqlim` tenendo conto che la matrice associata alla discretizzazione della derivata prima è data da:

$$B = \frac{\eta}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha quindi la seguente espressione $A = K + B + M$ e il termine noto deve essere modificato opportunamente tenendo conto delle condizioni al bordo.

Esercizi

Si consideri l'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} -u''(x) - 2u'(x) + e^x u(x) \\ &= \sin(x)(1 + e^x) + \cos(x)(2e^{-x} - 1) \\ &\text{per } x \in [-\pi, \pi] \\ u(-\pi) = -e^\pi, \quad u(\pi) = -e^{-\pi}. \end{aligned}$$

La soluzione esatta è: $u(x) = \sin(x) + e^{-x} \cos(x)$.

Esercizio 5

Usando la function `bvp` calcolare la soluzione, plottare la soluzione discreta insieme a quella esatta e calcolare l'errore.

Esercizio 6

Verificare che l'ordine di convergenza del metodo è $p = 2$.

Problemi con trasporto dominante

Esercizio 7

Si consideri l'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) + u'(x) &= 0 \quad \text{per } x \in [0, 1] \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 1. \end{aligned}$$

Risolvere l'equazione data con i seguenti valori di $N = [10 \ 20 \ 40 \ 80 \ 160 \ 320 \ 640]$. Confrontare il comportamento della soluzione discreta per i seguenti valori $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$ e $\varepsilon = 0.001$.

Risoluzione con differenze finite all'indietro

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $N + 1$ parti uguali e poniamo $h = (b - a)/(N + 1)$. Poniamo poi $x_i = a + ih$ e $u_i^h \approx u(x_i)$. Usando le **differenze finite all'indietro** si ottiene il seguente sistema lineare:

$$-\mu \frac{u_{i-1}^h - 2u_i^h + u_{i+1}^h}{h^2} + \eta(x_i) \frac{u_i^h - u_{i-1}^h}{h} + \sigma(x_i) u_i^h = f(x_i)$$

per $i = 1, \dots, N$

$$u_0^h = \alpha, \quad u_{N+1}^h = \beta$$

Risoluzione con differenze finite all'indietro II

Quindi si ricava la soluzione u_i^h per $i = 1, \dots, N$ risolvendo il sistema

$$Au^h = F$$

essendo A la matrice tridiagonale che ha i seguenti elementi

$$a_{ii} = 2\mu/h^2 + \eta(x_i)/h + \sigma(x_i),$$

$$a_{ii-1} = -\mu/h^2 - \eta(x_i)/h, \quad a_{ii+1} = -\mu/h^2$$

e il termine noto è dato da

$$F_1 = f(x_1) + (\mu/h^2 + \eta(x_1)/h)\alpha,$$

$$F_i = f(x_i) \text{ per } i = 2, \dots, N-1,$$

$$F_N = f(x_N) + \mu\beta/h^2.$$

Function bvp con differenze finite all'indietro

In questo caso la matrice associata alla discretizzazione della derivata prima è data da:

$$B_{ind} = \frac{\eta}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha quindi la seguente espressione $A = K + B_{ind} + M$ e il termine noto deve essere modificato opportunamente tenendo conto delle condizioni al bordo.

Risoluzione con differenze finite in avanti

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $N + 1$ parti uguali e poniamo $h = (b - a)/(N + 1)$. Poniamo poi $x_i = a + ih$ e $u_i^h \approx u(x_i)$. Usando le **differenze finite in avanti** si ottiene il seguente sistema lineare:

$$-\mu \frac{u_{i-1}^h - 2u_i^h + u_{i+1}^h}{h^2} + \eta(x_i) \frac{u_{i+1}^h - u_i^h}{h} + \sigma(x_i) u_i^h = f(x_i)$$

per $i = 1, \dots, N$

$$u_0^h = \alpha, \quad u_{N+1}^h = \beta$$

Risoluzione con differenze finite in avanti II

Quindi si ricava la soluzione u_i^h per $i = 1, \dots, N$ risolvendo il sistema

$$Au^h = F$$

essendo A la matrice tridiagonale che ha i seguenti elementi

$$a_{ii} = 2\mu/h^2 - \eta(x_i)/h + \sigma(x_i),$$

$$a_{ii-1} = -\mu/h^2, \quad a_{ii+1} = -\mu/h^2 + \eta(x_i)/h$$

e il termine noto è dato da

$$F_1 = f(x_1) + \mu\alpha/h^2,$$

$$F_i = f(x_i) \text{ per } i = 2, \dots, N-1,$$

$$F_N = f(x_N) + (\mu/h^2 - \eta(x_N)/h)\beta.$$

Function bvp con differenze finite in avanti

La matrice associata alla discretizzazione della derivata prima è data da:

$$B_{av} = \frac{\eta}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha quindi la seguente espressione $A = K + B_{av} + M$ e il termine noto deve essere modificato opportunamente tenendo conto delle condizioni al bordo.

Esercizi

Esercizio 8

Si consideri l'equazione differenziale usata per svolgere l'Esercizio 5 e si confrontino le soluzioni ottenute con le tre differenze finite. Verificare che, approssimando la derivata prima, con le differenze finite centrate, il metodo è del **secondo ordine**, mentre le differenze finite in avanti e all'indietro danno una convergenza al **primo ordine**.

Esercizio 9

Risolvere l'equazione differenziale dell'Esercizio 7 usando sia differenze finite all'indietro che in avanti.

Esercizi

Esercizio 10

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) - u'(x) &= 0 \quad \text{per } x \in [0, 1] \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 1. \end{aligned}$$

Confrontare il comportamento delle soluzioni ottenute con le function `bvp`, usando le tre discretizzazioni della derivata prima per i seguenti valori $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$ e $\varepsilon = 0.001$.

Metodo upwind

La function `bvp_upwind` adotta una scelta automatica del metodo di discretizzazione della derivata prima.

Si usa con il comando

```
[x,u]=bvp_upwind(f,sigma,eta,mu,a,b,alfa,beta,N)
```

i dati in input e i risultati in output hanno il solito significato.

Esercizio 11

Risolvere le equazioni differenziali degli esercizi 7 e 10 mediante le function `bvp_upwind` e `bvp_cent` e riportare i risultati ottenuti su uno stesso grafico.