Approssimazione di dati

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,
http://lucia-gastaldi.unibs.it

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BRESCIA

Indice

Legge di Ohm

La **legge di Ohm** afferma che la differenza di potenziale V ai capi di un conduttore elettrico e l'intensità di corrente elettrica I che lo attraversa sono legati dalla relazione

$$V = R \cdot I$$

essendo R la resistenza elettrica del conduttore.

Supponiamo di avere un apparecchio per misurare la differenza di potenziale agli estremi di un filo conduttore e un amperometro per misurare l'intensità di corrente corrispondente.
I risultati sperimentali (contenuti nel file `datiOhm.m`) sono:

```
I=[-1,7,14,18,19,28,30,31,36,38,40,45,46];
V=[0,1,1.3,1.6,1.2,2.2,2.5,2.7,3.1,3.4,3.8,4.1,4.5];
V=V/4.5*7;
```

Si vuole rappresentare la legge che regola la relazione tra I e V.

Legge di Ohm (segue)

- Rappresentare i dati sperimentali marcandoli con un pallino.
- Interpolare i dati sperimentali usando un polinomio interpolatote di grado opportuno.
- Interpolare i dati usando le spline.
- Trovare la retta di regressione lineare.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati lineari

Siano dati (x_i, y_i) per $i = 0, \ldots, m$ con m abbastanza grande.
L'interpolazione in questo caso non dà risultati significativi.
Cerchiamo un'approssimazione della nostra quantità fisica nella forma

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x) \quad \text{essendo } \varphi_j \text{ funzioni assegnate.}$$

Imponendo il passaggio per tutti i punti si ottiene il sistema

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) = y_i, \quad \text{per } i = 0, \ldots, m$$

di $m + 1$ equazioni in $n + 1$ incognite con $n << m$, che difficilmente ha soluzione.
Per $i = 0, \ldots, m$ e $j = 0, \ldots, n$, poniamo $B_{ij} = \varphi_j(x_i)$.
Indichiamo con $\underline{y} \in \mathbb{R}^{m+1}$ il vettore che ha per componenti y_i e con $\underline{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ il vettore delle incognite a_j.
Il sistema $B\underline{a} = \underline{y}$ è sovradeterminato.

Minimi quadrati lineari

Minimi quadrati lineari

Trovare $\underline{a}$ che renda minima la seguente quantità:

$$\min_{\underline{a}\in\mathbb{R}^{n+1}} \|B\underline{a}-\underline{y}\|^2 = \min_{\underline{a}\in\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{i=0}^{m}\left(\left(\sum_{j=0}^{n} B_{ij}a_j\right)-y_i\right)^2 .$$

Regressione lineare I

Dati i punti (x_i, y_i) per $i = 0, \dots, m$, vogliamo calcolare la retta $y = a_0 x + a_1$ che meglio li approssima.
Il sistema diventa: $a_0 x_i + a_1 = y_i$ per $i = 0, \dots, m$ e abbiamo

$$B = \begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Si deve cercare il punto di minimo della funzione:

$$\Phi(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{m} (a_0 x_i + a_1 - y_i)^2$$

Annullando le derivate parziali si ottiene:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_0}(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{m} 2(a_0 x_i + a_1 - y_i) x_i = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{m} 2(a_0 x_i + a_1 - y_i) = 0$$

Si risolve quindi il sistema

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m} x_i^2 & \sum_{i=0}^{m} x_i \\ \sum_{i=0}^{m} x_i & m+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m} x_i y_i \\ \sum_{i=0}^{m} y_i \end{pmatrix}$$

ossia

$$B^T B \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = B^T \underline{y}$$

Minimi quadrati lineari: caso generale

$$\boxed{\min_{\underline{a}\in\mathbb{R}^{n+1}} \|B\underline{a}-\underline{y}\|^2}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}\|B\underline{a}-\underline{y}\|^2 &= (B\underline{a}-\underline{y})^T(B\underline{a}-\underline{y})\\ &= \underline{a}^T B^T B\underline{a} - \underline{a}^T B^T\underline{y} - \underline{y}^T B\underline{a} + \underline{y}^T\underline{y}\\ &= \underline{a}^T B^T B\underline{a} - 2\underline{y}^T B\underline{a} + \underline{y}^T\underline{y}\end{aligned}$$

Per trovare il minimo si annulla il gradiente, ottenendo il sistema lineare

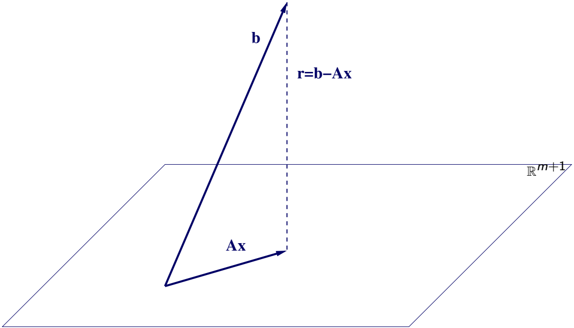
$$B^T B\underline{a} = B^T\underline{y}$$

detto **sistema delle equazioni normali**.

Sistema delle equazioni normali

$$\boxed{B^T B \underline{a} = B^T \underline{y}}$$

- La matrice $B^T B$ è una matrice quadrata $n \times n$.
- La matrice $B^T B$ è simmetrica e definita positiva se B è a rango pieno. In questo caso la soluzione è unica.
- La matrice $B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$ è detta **matrice pseudo-inversa** di B.



Minimi quadrati lineari in Matlab

Per calcolare il polinomio di grado n che approssima i punti (x_i, y_i) per $i = 0, \ldots, m$ nel senso dei minimi quadrati lineari si usa la function `polyfit` con il comando

```
c=polyfit(x,y,n)
```

Identificazione di parametri

Il file `dati.m`, contiene le osservate y_i di una certa quantità, prese per valori di t equispaziati.

- Trovare la retta di regressione lineare e plottare in una stesso grafico la retta ed i punti assegnati.
- In una seconda figura plottare i residui $y(t_i) - y_i$. Osservare che c'è un valore dei residui molto più grande degli altri. Chiamiamo il valore corrispondente valore anomalo.
- Eliminare l'osservata corrispondente al valore del residuo massimo. Ricalcolare la retta di regressione lineare e ripetere i grafici del caso precedente.
- Osservare l'andamento del residuo.
- Fittare i dati (escluso il valore anomalo) con un modello della forma seguente:

$$M(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \sin t.$$

- Plottare il modello con una linea continua, insieme ai dati (marcati con o) e al valore anomalo (marcato con *).

find

Il comando `find` serve per trovare le componenti di un vettore diverse da zero.

Esempio

Posto `x=[0 1 2 3 0 2 1]`, il comando `I=find(x)` fornisce il risultato `I=[2 3 4 6 7]`.
Ricordando che una variabile logica è vera se ha valore diverso da zero, il comando `J=find(x==1)` fornisce gli indici delle componenti che sono uguali a uno, quindi `J=[2 7]`.

Eliminazione di una componente

- Per eliminare la componente di posto `i` dal un vettore riga `v`: `v1=[v(1:i-1),v(i+1:end)]`.
- Per eliminare la componente di posto `i` dal un vettore colonna `w`: `w1=[w(1:i-1);w(i+1:end)]`.

Costruzione di una matrice per colonne

Per fittare i dati con il modello $M(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \sin(t)$, si deve calcolare il valore di $M(t_i)$ per ogni i e poi si cerca $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ in modo tale che $\underline{\beta}$ fornisca il valore minimo di

$$\sum_{i=1}^{m} (M(t_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} (\beta_1 + \beta_2 t_i + \beta_3 \sin(t_i) - y_i)^2.$$

Questo è equivalente a risolvere il sistema sovradeterminato $B\underline{\beta} = \underline{y}$ essendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \sin(t_1) \\ 1 & t_2 & \sin(t_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & \sin(t_n) \end{bmatrix} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Se `t` è il vettore colonna che contiene i valori della variabile t, la matrice può essere costruita per colonne con il comando

```
B=[ones(size(t)),t,sin(t)]
```