

Algebra lineare numerica

Sistemi lineari
Autovalori e autovettori

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,
<http://lucia-gastaldi.unibs.it>



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BRESCIA

- 1 Risoluzione di sistemi lineari
 - Risoluzione di sistemi lineari in Matlab
 - Metodi di risoluzione
 - Fattorizzazione
 - Analisi degli errori
 - Numero di condizionamento

- 2 Autovalori e autovettori
 - Autovalori ed autovettori
 - Calcolo degli autovalori e autovettori in Matlab

$$Ax=b$$

Tre casi possibili:

- ▶ Sistemi quadrati, $m = n$.
- ▶ Sistemi sovradeterminati, $m > n$.
- ▶ Sistemi sottodeterminati, $m < n$.

Come risolvere un sistema lineare con MATLAB

La risoluzione del sistema lineare si ottiene usando i simboli di divisione: **backslash** `\` e **slash** `/`.

$x = A \backslash b$ indica la soluzione di $Ax = b$, x e b vettori colonna.

$x = b / A$ indica la soluzione di $xA = b$, x e b vettori riga.

L'operatore **backslash** usa algoritmi differenti per trattare diversi tipi di matrici:

- ▶ Permutazioni di matrici triangolari.
- ▶ Matrici simmetriche e definite positive.
- ▶ Matrici quadrate, non singolari e piene.
- ▶ Matrici quadrate, non singolari e sparse.
- ▶ Sistemi rettangolari sovradeterminati.
- ▶ Sistemi rettangolari sottodeterminati.

Risoluzione di sistemi triangolari

Metodo di sostituzione in avanti

L matrice triangolare inferiore.

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{b_1}{\ell_{11}} \\x_i &= \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} x_j}{\ell_{ii}} \quad \text{per } i = 2, \dots, n\end{aligned}$$

Metodo di sostituzione all'indietro

U matrice triangolare superiore.

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{b_n}{u_{nn}} \\x_i &= \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j}{u_{ii}} \quad \text{per } i = n-1, \dots, 1\end{aligned}$$

Algoritmo di eliminazione di Gauss

```
for  $k = 1, \dots, n - 1$ 
  for  $i = k + 1, \dots, n$ 
    
$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

    for  $j = k + 1, \dots, n$ 
      
$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}$$

    end
    
$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}$$

  end
end
```

Fattorizzazione LU

Teorema

Costruiamo le seguenti matrici:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Se tutti i minori principali di A sono non nulli, si ha $LU = A$.

Il comando `[L,U]=miaLU(A)` fornisce la fattorizzazione LU associata al metodo di eliminazione di Gauss.

Strategia di pivoting

Per evitare possibili divisioni per 0 e per rendere l'algoritmo di eliminazione (oppure l'algoritmo di fattorizzazione LU) **stabili** rispetto alla **propagazione degli errori di arrotondamento** si usa la **strategia di pivoting** che consiste nello scambio sistematico di righe opportune.

Il risultato della fattorizzazione LU è:

$$PA = LU$$

essendo P una **matrice di permutazione** che tiene conto degli scambi di righe avvenuti.

Algoritmo di eliminazione di Gauss con pivoting

```
for  $k = 1, \dots, n - 1$   
  cerco più piccolo  $p$  tale che  $|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$   
  scambio la riga  $k$  con la riga  $p$   
  for  $i = k + 1, \dots, n$   
     $m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$   
    for  $j = k + 1, \dots, n$   
       $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}$   
    end  
     $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}$   
  end  
end
```

Le funzioni MATLAB per la fattorizzazione

| Funzione | Significato |
|----------|--|
| lu | Fattorizzazione $PA = LU$. |
| chol | Fattorizzazione di Cholesky $A = R^T R$ con R triang. sup. |
| qr | Fattorizzazione $A = QR$. |
| schur | Decomposizione di Schur $A = UTU^H$. |

Uso della function `lu`

Data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la function `lu` fornisce il risultato della fattorizzazione nelle seguenti forme:

- ▶ `[L,U,P]=lu(A)`:
fornisce le matrici L, U e P in modo che $L*U=P*A$.
- ▶ `[L1,U]=lu(A)`:
fornisce le matrici L1 e U in modo che $L1*U=A$. In questo caso la matrice L1 si ottiene dalla permutazione delle righe di L mediante P ossia $L1 = P^{-1}L$

Verificare il comportamento di `lu` sulla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e confrontare quanto ottenuto con la function `miaLU`.

Propagazione degli errori

Consideriamo al variare di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A e il vettore b dati da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2+a & 20 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 20-a \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dati i seguenti valori di a : $a = 1$, $a = 0$, $a = 0.5 \cdot 10^{-15}$,

- ▶ calcolare la fattorizzazione LU di A mediante la function `miaLU`;
- ▶ calcolare la differenza $A - LU$;
- ▶ usare la fattorizzazione ottenuta per risolvere il sistema lineare $Ax = b$, la cui soluzione esatta è $x = (1, -1, 1)^T$;
- ▶ ripetere la procedura usando le apposite function di Matlab per la fattorizzazione LU e la risoluzione dei due sistemi relativi alle matrici triangolari.

Riempimento delle matrici triangolari ottenute con LU

Si consideri la matrice $A \in \mathbb{R}^{25 \times 25}$ che ha i seguenti elementi:

$$a_{ii} = 1, \quad \text{per } i = 1, \dots, 25$$

$$a_{1j} = 1, \quad \text{per } j = 2, \dots, 25$$

$$a_{i1} = 1, \quad \text{per } i = 2, \dots, 25$$

Costruire la matrice usando prima il comando `speye` e poi correggendo la prima riga e la prima colonna.

Usare il comando `lu` per ottenere le matrici L, U, P che danno la fattorizzazione della matrice.

Usando i comandi `subplot` e `spy` visualizzare la distribuzione degli elementi non nulli delle matrici A, L, U, P in una stessa figura.

Norma di vettore

Sia \mathbf{x} un vettore di dimensione n , per $1 \leq p \leq \infty$, il comando `norm(x,p)` fornisce il valore della norma:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Le norme più usate sono:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{norm}(\mathbf{x},1)$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{norm}(\mathbf{x},2)=\text{norm}(\mathbf{x})$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{norm}(\mathbf{x},\text{Inf})$$

Norma di matrice

La moltiplicazione Ax può produrre un vettore con una norma completamente diversa da quella di x . La norma della matrice A si definisce come segue

$$\|A\| = M = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

$$\|\mathbb{I}\| = 1 \text{ per } \mathbb{I} \text{ matrice identità}$$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

`norm(A,p)` fornisce la norma di matrice per $p = 1, 2, \infty$:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

essendo $\rho(A^T A) = \max_i \sigma_i$, e σ_i autovalore di $A^T A$.

Numero di condizionamento

Definizione

$$K(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$$

si dice **numero di condizionamento della matrice** A .

Teorema

Si consideri il sistema lineare $Ax = b$. Siano δA e δb perturbazioni di A e di b rispettivamente e sia $x + \delta x$ la soluzione del sistema lineare:

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b.$$

Allora vale la seguente maggiorazione:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{K(A)}{1 - K(A)\|\delta A\|/\|A\|} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right).$$

Numero di condizionamento

$$K(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$$

La norma $\|A\|$ indica il rapporto massimo tra la norma del vettore Ax e quella di x .

Osserviamo che, ponendo $Ay = x$ e $y = A^{-1}x$, si ha

$$\|A^{-1}\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \max_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{\|Ay\|} = \frac{1}{\min_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}} = \frac{1}{m}$$

Il numero m indica il rapporto minimo tra la norma di Ax e quella di x . Di conseguenza

$$K(A) = \frac{\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}.$$

Il condizionamento in Matlab

- ▶ `cond(A)` o `cond(A,2)` calcola $K_2(A)$ (con la norma 2). Usa `svd(A)`. Computazionalmente costoso, adatto a matrici piccole.
- ▶ `cond(A,1)` calcola $K_1(A)$ (con la norma 1). Usa `inv(A)`. Meno lavoro che per `cond(A,2)`.
- ▶ `cond(A,Inf)` calcola $K_\infty(A)$ (con la norma ∞). Usa `inv(A)`. È lo stesso di `cond(A',1)`.
- ▶ `condest(A)` stima $K_1(A)$. Usa `lu(A)` e un algoritmo recente di Higham e Tisseur. Adatto specialmente per matrici sparse e di grandi dimensioni.
- ▶ `rcond(A)` stima $1/K_1(A)$. Usa `lu(A)` e un algoritmo più vecchio sviluppato in LINPACK e LAPACK.

Esercizio

Dati

$$A = \begin{pmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.8642 \\ 0.1440 \end{pmatrix},$$

calcolare la soluzione esatta del sistema $Ax = b$.

Si considerino le seguenti perturbazioni $r_1 = [-10^{-8}, 10^{-8}]^T$ e $r_2 = [10^{-8}, 10^{-8}]^T$ al termine noto.

- ▶ Per ciascuna perturbazione calcolare la soluzione del sistema $A\hat{x}_i = b + r_i$, $i = 1, 2$ mediante il comando `x=A\b`.
- ▶ Calcolare l'errore relativo commesso, e confrontarlo con la perturbazione relativa del termine noto.
- ▶ Calcolare il numero di condizionamento di A .
- ▶ Verificare che il risultato ottenuto soddisfa la stima teorica.

Matrice mal condizionata

Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **matrice di Hilbert** di elementi

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

e $b \in \mathbb{R}^n$ tale che la soluzione del sistema sia $x = (1, \dots, 1)^\top$.

- ▶ Risolvere il sistema al variare di n . Sia \hat{x} la soluzione calcolata.
- ▶ Calcolare il numero di condizionamento della matrice K .
- ▶ Riportare in uno stesso grafico in scala semilogaritmica le seguenti quantità al variare di n :
 - ▶ il numero di condizionamento;
 - ▶ l'errore relativo $E = \|x - \hat{x}\|/\|x\|$;
 - ▶ il **residuo** $\|b - A\hat{x}\|/\|b\|$;
 - ▶ la stima dell'errore $K\|b - A\hat{x}\|/\|b\|$.

Per calcolare le norme usare il comando **norm**.

Comandi utili per l'esercizio

- ▶ `A=hilb(n)` fornisce la matrice di Hilbert di dimensione $n \times n$.
- ▶ `x=ones(n,1)` genera il vettore colonna di dimensione n che ha tutte le componenti uguali a 1.
- ▶ `b=A*x` calcola il termine noto.
- ▶ `xapp=A\b` risolve il sistema lineare.
- ▶ `err=norm(x-xapp)/norm(x)` calcola l'errore relativo.
- ▶ `r=b-A*xapp` calcola il residuo.
- ▶ `res=norm(r)/norm(b)` calcola la norma del residuo rapportata alla norma del termine noto.
- ▶ `K=cond(A)` calcola il numero di condizionamento di A .
- ▶ Il comando `semilogy` produce un grafico con la scala logaritmica in base 10 sull'asse delle y .

Suggerimento Per potere fare il grafico in scala semilogaritmica si devono creare i vettori `err`, `res`, `K`.

Autovalori ed autovettori di una matrice

Definizione

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice **autovalore della matrice** A , se esiste un vettore $x \in \mathbb{C}^n$ tale che $x \neq 0$ e

$$Ax = \lambda x.$$

Il vettore x si chiama **autovettore della matrice** A associato all'autovalore λ .

Osservazione

Gli autovettori di una matrice **non** sono unici: se x è un autovettore di A associato a λ anche αx , con $\alpha \in \mathbb{C}$, è autovettore di A associato a λ .

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x)$$

Polinomio caratteristico

Da $Ax = \lambda x$, si ricava $(A - \lambda I)x = 0$, essendo I la matrice identità. Affinché esista $x \neq 0$ che soddisfa questa relazione, la matrice $A - \lambda I$ deve essere singolare cioè

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Proposizione

Gli autovalori di una matrice sono tutte e sole le radici del **polinomio caratteristico** definito da

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Operazione di similitudine

Matrici simili

Date due matrici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Se esiste una matrice non singolare $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che

$$B = X^{-1}AX$$

allora le matrici A e B si dicono **simili**.

Due matrici simili hanno gli stessi autovalori e lo stesso polinomio caratteristico, infatti:

$$B(X^{-1}x) = (X^{-1}AX)(X^{-1}x) = X^{-1}Ax = X^{-1}(\lambda x) = \lambda X^{-1}x.$$

Diagonalizzazione di una matrice

Diagonalizzazione di A

La matrice A si dice **diagonalizzabile** se esistono una matrice invertibile $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e una matrice diagonale $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tali che

$$\Lambda = X^{-1}AX.$$

Se A è diagonalizzabile allora gli autovettori sono **linearmente indipendenti**. Infatti si ha

$$\Lambda = X^{-1}AX \quad \Rightarrow \quad AX = X\Lambda.$$

Le colonne di X danno gli autovettori della matrice A ; siccome X è non singolare le sue colonne sono linearmente indipendenti.

Matrici hermitiane

Matrici hermitiane

La matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice **hermitiana** se $A = A^H$ essendo A^H la matrice di elementi:

$$a_{ij}^H = \overline{a_{ji}}$$

(\bar{a} è il **complesso coniugato** di a).

Osservazione Se A è una matrice ad elementi reali allora $A^H = A^T$.

Teorema

- ▶ Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice hermitiana, allora i suoi autovalori sono **reali**.
- ▶ Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice hermitiana, allora i suoi autovettori sono a due a due **ortogonali**.

Localizzazione degli autovalori

Teorema di Gershgorin

Data la matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, costruiamo i seguenti cerchi del piano complesso:

$$R_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\} \quad i = 1, \dots, n$$

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}|\} \quad i = 1, \dots, n$$

Allora gli autovalori della matrice A sono contenuti sia nell'unione dei dischi R_i che dei dischi C_i , ossia

$$\lambda \in (\cup_{i=1}^n R_i) \cap (\cup_{i=1}^n C_i).$$

Inoltre, se p dischi R_i sono disgiunti dai rimanenti, si ha che esattamente p autovalori di A cadono nell'unione di questi dischi.

Localizzazione degli autovalori

La function `gershgorin.m` disegna i cerchi di Gershgorin di una assegnata matrice A . Si deve usare il seguente comando

```
gershgorin(A)
```

In **blu** sono disegnati i cerchi R_i costruiti per righe;
in **rosso** sono disegnati i cerchi C_i costruiti per colonne.

Function di Matlab per il calcolo di autovalori ed autovettori

eig

La function `eig` calcola tutti gli autovalori e gli autovettori della matrice A mediante il metodo QR.

- ▶ `e=eig(A)` fornisce un vettore contenente gli autovalori di A .
- ▶ `[V,D]=eig(A)` fornisce la matrice diagonale D , contenente gli autovalori sulla diagonale, e la matrice V , contenente gli autovettori (colonna per colonna) tali che $A * V = V * D$.

Function di Matlab per il calcolo di autovalori ed autovettori

eigs

La function `eigs` calcola gli autovalori di modulo più grande e gli autovettori associati di una **matrice in formato sparse** applicando il metodo di Arnoldi.

- ▶ `e=eigs(A)` calcola i **sei** autovalori più grandi in modulo.
- ▶ `[V,D]=eigs(A)` calcola la matrice diagonale D contenente i sei autovalori più grandi in modulo e la matrice V le cui colonne sono i corrispondenti autovettori.
- ▶ `eisg(A,k)` calcola i **k** autovalori di A più grandi in modulo.
- ▶ `eigs(A,k,sigma)` calcola **k** autovalori con i seguenti criteri:
 - `sigma` scalare **k** autovalori più vicini a `sigma`
 - `sigma='lm'` **k** autovalori più grandi
 - `sigma='sm'` **k** autovalori più piccoli
 - `sigma='be'` **k** autovalori più grandi e più piccoli

Esercizio 1

Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 - 7i & 2 & 1 & 0 \\ -2 & i & 0 & 1 - i \\ 3 + 2i & 1 & 2 & 4i \\ 0 & 0 & i & -7 \end{pmatrix}$$

- ▶ Usare la function `gershgorin` per localizzare gli autovalori delle due matrici.
- ▶ Calcolare autovalori ed autovettori delle due matrici mediante la function `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin.

La function potenze

```
potenze.m
```

```
[lambda,x,iter]=potenze(A,x0,toll,nmax)
```

| | |
|--------|--|
| lambda | autovalore calcolato; |
| x | autovettore calcolato; |
| iter | numero di iterazioni per arrivare a convergenza; |
| A | matrice; |
| x0 | vettore iniziale; |
| toll | tolleranza; |
| nmax | numero massimo di iterazioni |

Le function `shiftinv`

```
shiftinv.m
```

```
[lambda,x,iter]=shiftinv(A,mu,x0,toll,nmax)
```

| | |
|---------------------|--|
| <code>lambda</code> | autovalore calcolato; |
| <code>x</code> | autovettore calcolato; |
| <code>iter</code> | numero di iterazioni per arrivare a convergenza; |
| <code>A</code> | matrice; |
| <code>mu</code> | shift; |
| <code>x0</code> | vettore iniziale; |
| <code>toll</code> | tolleranza; |
| <code>nmax</code> | numero massimo di iterazioni |

Esercizio 2

Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- ▶ Usare la function `gershgorin` per localizzare gli autovalori.
- ▶ Calcolare gli autovalori con la function `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin.
- ▶ Usare la function `potenze` per calcolare l'autovalore di modulo massimo.
- ▶ Usare la function `shiftinv` con shift $\mu = 0$ per calcolare l'autovalore di modulo minimo.
- ▶ Osservato che `shiftinv` con shift $\mu = 0$ non converge e che gli autovalori di modulo minimo sono complessi coniugati, trovare degli shift che permettano di calcolarli.

Esercizio 3

Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & 10 & 12 \\ 6 & -6 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

- ▶ Calcolare gli autovalori e gli autovettori usando il comando `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin;
- ▶ calcolare l'autovalore di modulo massimo e l'autovettore associato mediante la function `potenze`, usando come vettore iniziale `x0=[0 1 0 0]'` e `x0=[0 0 1 -1]'`;
- ▶ verificare che uno dei due vettori iniziali risulta ortogonale all'autovettore calcolato (usare `toll=eps`).

Esercizio 4

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3.5 + i/3 & -2.5 + i/3 & -2.5 + i & 4 \\ 1.5 + i/6 & 1.5 + i/6 & -3.5 + i/2 & 2 \\ i/6 & -2 + i/6 & 3 + i/2 & 2 \\ -0.5 + i/3 & 2.5 - 2i/3 & -1.5 & -1 + i \end{pmatrix}$$

- ▶ Calcolare gli autovalori e gli autovettori usando il comando `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin;
- ▶ calcolare l'autovalore di modulo massimo e l'autovettore associato mediante la function `potenze`, usando come vettore iniziale `x0=[0 1 0 1]'` e `x0=[0 0 1 1]'` e tolleranza pari alla precisione di macchina `eps`;
- ▶ verificare che uno dei due vettori iniziali risulta ortogonale all'autovettore calcolato.

Esercizio sull'uso di `eigs`

Costruire usando la function `Laplace` la matrice dei coefficienti associata al seguente problema differenziale agli autovalori:

$$\begin{aligned} -u_{xx} - u_{yy} &= \lambda u \quad \text{in } [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u &= 0 \quad \text{sul bordo del quadrato.} \end{aligned}$$

Usando il comando `eigs` calcolare i 10 autovalori più piccoli e gli autovettori associati.

Verificare che gli autovettori sono le approssimazioni dei numeri $n^2 + m^2$ per n e m interi e positivi.

Plottare con il comando `graf_lapl` i corrispondenti autovettori. Si osserva che gli autovettori forniscono un'approssimazione delle funzioni $u(x, y) = \sin(nx)\sin(my)$.