Equazioni differenziali con valori al bordo

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,
http://lucia-gastaldi.unibs.it

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BRESCIA

Indice

Equazioni di diffusione reazione

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{array}{l} -\mu u''(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in (a, b) \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta, \end{array}$$

essendo $\mu > 0$, σ e f funzioni continue sull'intervallo (a, b).

Teorema

Se $\sigma(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora esiste una ed una sola soluzione dell'equazione differenziale con valori ai limiti.

Discretizzazione con differenze finite

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $N+1$ parti uguali e poniamo $h = (b-a)/(N+1)$. Poniamo poi $x_i = a + ih$.

Possiamo approssimare la derivata seconda con la differenza finita del secondo ordine

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \quad \text{per } i = 1, \dots, N.$$

Indicando con u_i^h il valore approssimato di $u(x_i)$, si ottiene il seguente sistema lineare:

$$-\mu \frac{u_{i+1}^h - 2u_i^h + u_{i-1}^h}{h^2} + \sigma(x_i) u_i^h = f(x_i) \quad \text{per } i = 1, \dots, N$$
$$u_0^h = \alpha \qquad u_{N+1}^h = \beta$$

Equazioni differenziali con valori ai limiti II

Quindi si ricava la soluzione u_i^h per $i = 1, \ldots, N$ risolvendo il sistema

$$Au^h = F$$

essendo A la matrice tridiagonale che ha i seguenti elementi

$$a_{ii} = 2\mu/h^2 + \sigma(x_i), \quad a_{ii-1} = a_{ii+1} = -\mu/h^2$$

e il termine noto è dato da

$$\begin{aligned} F_1 &= f(x_1) + \mu\alpha/h^2, \\ F_i &= f(x_i) \text{ per } i = 2, \ldots, N-1, \\ F_N &= f(x_N) + \mu\beta/h^2. \end{aligned}$$

Stima dell'errore

$$\max_{1 \le i \le N} |u(x_i) - u_i^h| \le Ch^2 \max_{a \le x \le b} |u^{(4)}(x)|$$

Costruzione della matrice

La matrice A si può decomporre nella somma $A = K + M$ essendo

$$K = \frac{\mu}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \sigma(x_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma(x_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \sigma(x_N) \end{bmatrix}$$

Costruzione del termine noto

Il termine noto può essere ottenuto come la somma di due vettori $F = \tilde{F} + bc$: $\tilde{F}$ tiene conto del dato f sull'intervallo, mentre bc è relativo alle condizioni al bordo.

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ \dots \\ f(x_N) \end{bmatrix} \qquad bc = \begin{bmatrix} \mu\alpha/h^2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \mu\beta/h^2 \end{bmatrix}$$

Dal punto di vista pratico non è necessario costruire il vettore bc, ma basta sommare alla prima e ultima componente di F il contributo derivante dalle condizioni al bordo.

Soluzione dell'equazione differenziale

Scrivere la function eqlim per calcolare la soluzione dell'equazione differenziale con valori ai limiti

$$\begin{array}{l} -\mu u''(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in [a,b] \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{array}$$

mediante il seguente comando:

```
[x,u]=eqlim(f,sigma,mu,a,b,alfa,beta,N)
```

Input

`f,sigma`	nome delle function_handle che contengono l'espressione analitica di f e σ
`mu`	coefficiente davanti alla derivata seconda
`a,b`	estremi dell'intervallo
`alfa,beta`	valori ai limiti
`N`	numero di punti in cui si calcola la soluzione

Output

`x`	ascisse dei punti in cui si calcola la soluzione
`u`	valori della soluzione

Function `eqlim`

La function `eqlim` si compone di 5 passi:

- assegnazione della griglia di calcolo: calcolo h e i punti $x_i = a + ih$ per $i = 1, \ldots, N$;
- costruzione della matrice A come suggerito usando i comandi `ones` e `diag`;
- costruzione del termine noto (attenzione al nome);
- risoluzione del sistema lineare;
- organizzazione dell'output che tenga conto delle condizioni al bordo.

Oss Si possono completare i vettori `x` e `u` con i valori negli estremi dell'intervallo. Per fare ciò si devono aggiungere le rispettive componenti all'inizio ed alla fine del vettore, con i comandi

- `x=[a,x,b]` se `x` è un vettore riga;
- `u=[alfa;u;beta]` se `u` è un vettore colonna.

eye, speye, ones, zeros

eye

Il comando `eye` serve per costruire la matrice identità.
`eye(N)` fornisce la matrice identità di dimensione $N \times N$.
`eye(M,N)` è una matrice di dimensione $M \times N$ con 1 sulla diagonale principale e 0 altrove.
`eye(size(A))` è la matrice identità con le stesse dimensioni di `A`.

speye

Il comando `speye` serve per costruire la matrice identità in formato `sparse` con la stessa sintassi di `eye`.

ones e zeros

I comandi `ones` e `zeros` permettono di costruire un array che ha componenti tutte uguali ad 1 oppure a 0.
`b=ones(10,1)` costruisce il vettore colonna b di 10 componenti tutte uguali a 1.
`c=zeros(3,3)` costruisce una matrice 3×3 di elementi tutti uguali a 0.

diag

Il comando `diag` ha due funzioni diverse:

Costruzione di una matrice con una sola diagonale non nulla

Sia `V` un vettore di N componenti.
`diag(V,K)` è una matrice quadrata di ordine $N + ABS(K)$ che ha gli elementi di `V` sulla diagonale K-esima.

se $K = 0$ è la diagonale principale
se $K > 0$ si trova sopra la diagonale principale
se $K < 0$ si trova sotto la diagonale principale

Estrazione di una diagonale da una matrice

Sia `A` una matrice di dimensione $n \times n$ il comando

`d=diag(A,k)`

fornisce il vettore
$d = [a_{1,1+k}, \dots, a_{n-k,n}]^t$ se $k \geq 0$
$d = [a_{1+k,1}, \dots, a_{n,n-k}]^t$ se $k < 0$.

Formato `sparse`

Il formato sparse è utilizzato in Matlab per ridurre i costi di memorizzazione della matrice.

`S=sparse(A)` converte la matrice in formato full in una matrice in formato sparse tenendo in memoria solo gli elementi diversi da zero.

`S=sparse(m,n)` genera una matrice in formato sparse con tutti gli elementi nulli.

`S = sparse(i,j,s,m,n)` usa i vettori `i`, `j` e `s` per costruire la matrice di dimensione $m \times n$ tale che `S(i(k),j(k)) = s(k)`.

Il comando `spy(A)` mostra in un grafico quali sono gli elementi di A non nulli ed il loro numero `nnz`.

Il comando `spdiags`

Il comando `spdiags` generalizza il comando `diag`.

Sono disponibili quattro operazioni differenti.

- `B = spdiags(A)` estrae tutte le diagonali non nulle dalla matrice A. Le p colonne di B sono le diagonali di A. `[B,d] = spdiags(A)` fornisce anche il vettore `d` di lunghezza p, i cui valori specificano le diagonali di A.
- `B = spdiags(A,d)` estrae le diagonali specificate da d.
- `A = spdiags(B,d,m,n)` crea una matrice sparsa $m \times n$ prendendo le colonne di B e mettendole al posto delle diagonali specificate da d.
- `A = spdiags(B,d,A)` sostituisce le diagonali specificate da d con le colonne di B.

Esercizio 1

Risolvere l'equazione differenziale

$$
\begin{aligned}
&-u''(x) + \sin x\, u(x) = (1 - \cos^2 x - 2\cos x)e^x \quad \text{per } x \in [0, \pi] \\
&u(0) = u(\pi) = 0.
\end{aligned}
$$

Confrontare i risultati ottenuti con la soluzione esatta
$u(x) = \sin x\, e^x$.

Scrivere un file di tipo script che:

- assegna i dati, in particolare le funzioni f e σ di tipo `@`;
- calcola la soluzione usando la function `eqlim`;
- plotta la soluzione discreta insieme a quella continua;
- calcola l'errore

$$E = \max_{1 \leq i \leq N} |u(x_i) - u_i^h|.$$

Convergenza del metodo delle differenze finite

Esercizio 2

Dato `N=[10 20 40 80 160 320]`, per ciascun valore di N

- calcolare la soluzione dell'equazione differenziale dell'esercizio precedente;
- riportare la soluzione in un grafico insieme alla soluzione esatta;
- valutare l'errore.

Alla fine riportare gli errori in funzione di `h` e di `N` in un grafico in scala bilogaritmica insieme all'andamento teorico.
Calcolare l'ordine di convergenza del metodo.

Esercizio 3

Dato $q \geq 2$, si consideri l'equazione differenziale

$$-u''(x) = q(q-1)|x|^{q-2} \text{ per } x \in (-1,1), \qquad u(-1) = u(1) = 0.$$

La soluzione è data dalla funzione $u(x) = 1 - |x|^q$.
Calcolare l'ordine di convergenza del metodo delle differenze finite in corrispondenza ai seguenti valori di q:

$$q = 2, 2.5, 3, 3.5, 4.$$

Cosa succede se $q < 2$? Per esempio per $q = 3/2$? o per $q = 1$?

Equazioni di diffusione trasporto

Si consideri l'equazione differenziale

$$
\begin{aligned}
&-\mu u''(x) + \eta(x)u'(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in [a, b] \\
&u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.
\end{aligned}
$$

Per approssimare la derivata prima si possono usare le seguenti **differenze finite** ($h > 0$):

diff. finita centrata $\quad u'(\bar{x}) \approx \delta u(\bar{x}) = \dfrac{u(\bar{x}+h) - u(\bar{x}-h)}{2h}$

diff. finita all'indietro $\quad u'(\bar{x}) \approx \delta^- u(\bar{x}) = \dfrac{u(\bar{x}) - u(\bar{x}-h)}{h}$

diff. finita in avanti $\quad u'(\bar{x}) \approx \delta^+ u(\bar{x}) = \dfrac{u(\bar{x}+h) - u(\bar{x})}{h}$

Function bvp

`[x,u]=bvp(f,sigma,eta,mu,a,b,alfa,beta,N,DF)`

Input

`f,sigma`	nome delle function_handle che contengono l'espressione analitica di f e σ
`eta`	coefficiente davanti alla derivata prima ($\in \mathbb{R}$)
`mu`	coefficiente davanti alla derivata seconda ($\in \mathbb{R}$)
`a,b`	estremi dell'intervallo
`alfa,beta`	valori ai limiti
`N`	numero di punti in cui si calcola la soluzione
`DF`	scelta delle differenze finite:
`DF=0`	differenze finite centrate
`DF=1`	differenze finite in avanti
`DF=-1`	differenze finite all'indietro

Output

`x`	ascisse dei punti in cui si calcola la soluzione
`u`	valori della soluzione

Esercizi

Si consideri l'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} -u''(x) - 2u'(x) + e^x\, u(x) \\ &= \sin(x)(1+e^x) + \cos(x)(2e^{-x} - 1) \\ &\text{per } x \in [-\pi, \pi] \\ u(-\pi) = -e^{\pi}, \quad u(\pi) = -e^{-\pi}. \end{aligned}$$

La soluzione esatta è: $u(x) = \sin(x) + e^{-x}\cos(x)$.

Esercizio 5

Usando la function `bvp` calcolare la soluzione per ogni scelta del metodo di approssimazione della derivata prima. Plottare le soluzioni discrete insieme a quella esatta e calcolare l'errore.

Esecizio 6

Verificare l'ordine di convergenza dei tre metodi.

Problemi con trasporto dominante

Esercizio 7

Si consideri l'equazione differenziale:

$$\begin{array}{l} -\varepsilon u''(x) + u'(x) = 0 \quad \text{per } x \in [0,1] \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \end{array}$$

Risolvere l'equazione data con i seguenti valori di `N=[10 20 40 80 160 320 640]` utilizzando differenze finite centrate, in avanti e all'indietro in corrispondenza ai seguenti valori $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$ e $\varepsilon = 0.001$.

Esercizi

Esercizio 10

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{array}{l} -\varepsilon u''(x) - u'(x) = 0 \quad \text{per } x \in [0,1] \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \end{array}$$

Confrontare il comportamento delle soluzioni ottenute con differenze finite centrate, in avanti e all'indietro per i seguenti valori $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$ e $\varepsilon = 0.001$.

Metodo upwind

La function `bvp_upwind` adotta una scelta automatica del metodo di discretizzazione della derivata prima.

Si usa con il comando

```
[x,u]=bvp_upwind(f,sigma,eta,mu,a,b,alfa,beta,N)
```

i dati in input e i risultati in output hanno il solito significato.

Esercizio 11

Risolvere le equazioni differenziali degli esercizi 7 e 10 mediante le function `bvp_upwind` e `bvp` con differenze finite centrate e riportare i risultati ottenuti su uno stesso grafico.

Equazione del calore

L'equazione del calore si scrive come segue

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \mu \Delta u(x,t) = f(x,t), && x \in \Omega,\ \ t > 0\\
&u(x,t) = g(x,t) && x \in \partial\Omega,\ \ t > 0\\
&u(x,0) = u^0(x) && x \in \Omega
\end{aligned}$$

essendo $\mu = k/\rho c$ il coefficiente di diffusione termica (k conducibilità termica, ρ densità di massa, c capacità di calore specifico).

Nel caso di un dominio monodimensionale l'equazione diventa:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), && x \in (a,b),\ \ t > 0\\
&u(a,t) = g_a(t),\ \ u(b,t) = g_b(t) && t > 0\\
&u(x,0) = u^0(x) && x \in (a,b)
\end{aligned}$$

Semi-discretizzazione in spazio con differenze finite

Poniamo: $h = (b-a)/(N+1)$,
$x_i = a + ih$ per $i = 0, \dots, N+1$.
$u_i^h(t) \approx u(x_i, t)$
Discretizziamo con differenze finite la derivata seconda:

$$\frac{du_i^h}{dt}(t) - \mu \frac{u_{i-1}^h(t) - 2u_i^h(t) + u_{i+1}^h(t)}{h^2} = f(x_i, t), \quad i = 1, \dots, N$$
$$u_0^h(t) = g_a(t), \qquad u_{N+1}^h(t) = g_b(t)$$
$$u_i^h(0) = u^0(x_i)$$

Abbiamo ricondotto il problema al seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{d\mathbf{u}_h}{dt}(t) = -\frac{\mu}{h^2} A\mathbf{u}_h(t) + \mathbf{f}(t), \quad t > 0$$
$$\mathbf{u}_h(0) = \mathbf{u}^0.$$

essendo A la matrice tridiagonale associata alle differenze finite e $\mathbf{f}$ il vettore termine noto ottenuto tenendo conto delle condizioni al bordo.

Differenze finite nel dettaglio

$$\frac{d\mathbf{u}_h}{dt}(t) = -\frac{\mu}{h^2} A\mathbf{u}_h(t) + \mathbf{f}(t), \quad t > 0$$
$$\mathbf{u}_h(0) = \mathbf{u}^0.$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f(x_1, t) + \mu g_a(t)/h^2 \\ f(x_2, t) \\ \dots \\ f(x_{N-1}, t) \\ f(x_N, t) + \mu g_b(t)/h^2 \end{bmatrix}$$

Discretizzazione spazio-tempo: θ-metodo

Indichiamo con Δt il passo di discretizzazione in tempo
$(\Delta t = T/M)$, $t^n = n\Delta t$
$u^n_{h,i} \approx u(x_i, t^n)$ e $\mathbf{u}^n_h$ è il vettore di componenti $u^n_{h,i}$.

θ-metodo

Per $0 \leq \theta \leq 1$, si calcola

$$\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} = -\frac{\mu}{h^2} A(\theta \mathbf{u}_h^{n+1} + (1-\theta)\mathbf{u}_h^n) + \theta \mathbf{f}^{n+1} + (1-\theta)\mathbf{f}^n$$
$$\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{u}^0.$$

Quindi la soluzione si calcola risolvendo ad ogni passo temporale il sistema:

$$(I + \frac{\mu}{h^2}\theta \Delta t A)\mathbf{u}_h^{n+1} = (I - \frac{\mu}{h^2}(1-\theta)\Delta t A)\mathbf{u}_h^n + \Delta t F^{n+1}$$

con $F^{n+1} = \theta \mathbf{f}^{n+1} + (1-\theta)\mathbf{f}^n$.

Proprietà del θ-metodo

Per $\theta = 0$ si ha il metodo di Eulero esplicito.
Per $\theta = 1$ si ha il metodo di Eulero implicito.
Per $\theta = 1/2$ si ha il metodo di Crank-Nicolson.

Ordine: il metodo è del primo ordine per $\theta \neq 1/2$, ed è del secondo ordine per $\theta = 1/2$.

Assoluta stabilità:
per $\theta \geq 1/2$ il metodo è incondizionatamente assolutamente stabile;
per $\theta < 1/2$ si ha la condizione

$$\Delta t \leq \frac{2}{(1 - 2\theta)\lambda_{h,\max}}$$

dove $\lambda_{h,\max}$ è il massimo autovalore della matrice $M^{-1}K$.
Si dimostra che $\lambda_{h,\max} \approx 1/h^2$.

Function `calore`

```
[x,t,u]=calore(mu,f,u0,a,b,ga,gb,T,N,M,teta)
```

Input

`mu`	coefficiente di diffusione
`f`	sorgente di calore (funz. di x,t)
`u0`	dato iniziale
`a,b`	estremi dell'intervallo
`ga,gb`	dati al bordo (funz. di t)
`T`	intervallo di tempo
`N,M`	numero di suddivisioni in spazio e tempo
`teta`	parametro del metodo.

Output

`x,t`	vettori dei punti di suddivisione in spazio e tempo
`u`	array `NxM` contenente i valori della soluzione.

Esercizio 1

Risolvere la seguente equazione del calore:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in (0,1),\ 0 < t < 1$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad 0 < t < 1$$
$$u(x,0) = x(1-x) \quad x \in (0,1)$$

Esercizio 2

Si consideri una barra di alluminio di densità $\rho = 2700\ Kg/m^3$, di capacità di calore specifico $c = 897 J/(kgK)$, lunga 3 metri e dotata di conducibilità termica pari a $k = 273\ W/mK$ (Watt per Kelvin-metri). Studiare l'evoluzione della temperatura nella barra partendo dalla condizione iniziale $T(x, 0) = 500\ K$ se $x \in (1, 2)$ e 250 K altrimenti. Le condizioni al bordo sono $T(0, t) = T(3, t) = 250\ K$.
Calcolare la soluzione per diversi valori di θ nell'intervallo $(0, 2000)$ secondi con passo temporale $\Delta t = 0.25$.