

Autovalori ed autovettori di una matrice

Lucia Gastaldi

Dipartimento di Matematica,
<http://lucia-gastaldi.unibs.it>



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BRESCIA

Indice

- 1 Definizioni di autovalori ed autovettori
 - Autovalori ed autovettori
- 2 Metodo delle potenze
- 3 Calcolo degli autovalori e autovettori in Matlab
- 4 Esercizi

Autovalori ed autovettori di una matrice

Definizione

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice **autovalore della matrice** A , se esiste un vettore $x \in \mathbb{C}^n$ tale che $x \neq 0$ e

$$Ax = \lambda x.$$

Il vettore x si chiama **autovettore della matrice** A associato all'autovalore λ .

Osservazione

Gli autovettori di una matrice **non** sono unici: se x è un autovettore di A associato a λ anche αx , con $\alpha \in \mathbb{C}$, è autovettore di A associato a λ .

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x)$$

Polinomio caratteristico

Da $Ax = \lambda x$, si ricava $(A - \lambda I)x = 0$, essendo I la matrice identità. Affinché esista $x \neq 0$ che soddisfa questa relazione, la matrice $A - \lambda I$ deve essere singolare cioè

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Proposizione

Gli autovalori di una matrice sono tutte e sole le radici del **polinomio caratteristico** definito da

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Molteplicità di un autovettore

Molteplicità di un autovalore

λ si dice **autovalore semplice** di A se λ è una radice semplice del polinomio $p(\lambda)$.

λ ha **molteplicità** ν se λ è una radice di molteplicità ν di $p(\lambda)$.

Per il teorema dell'algebra **esistono esattamente** n autovalori di una matrice di ordine n se vengono contati tenendo conto della loro molteplicità.

Autospazio

Si definisce **autospazio** associato all'autovalore λ lo **spazio lineare**

$$V(\lambda) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax - \lambda x = 0\}.$$

La dimensione di $V(\lambda)$ è minore o uguale alla molteplicità ν di λ .

Diagonalizzazione di una matrice

Matrici simili

Date due matrici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Se esiste una matrice non singolare $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che

$$B = X^{-1}AX$$

allora le matrici A e B si dicono **simili**.

Due matrici simili hanno gli stessi autovalori e lo stesso polinomio caratteristico, infatti:

$$B(X^{-1}x) = (X^{-1}AX)(X^{-1}x) = X^{-1}Ax = X^{-1}(\lambda x) = \lambda X^{-1}x.$$

Diagonalizzazione di A

La matrice A si dice **diagonalizzabile** se esistono una matrice invertibile $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e una matrice diagonale $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tali che

$$\Lambda = X^{-1}AX.$$

Diagonalizzazione di una matrice

Se A è diagonalizzabile allora gli autovettori sono **linearmente indipendenti**. Infatti si ha

$$\Lambda = X^{-1}AX \quad \Rightarrow \quad AX = X\Lambda.$$

Le colonne di X danno gli autovettori della matrice A ; siccome X è non singolare le sue colonne sono linearmente indipendenti.

Matrici hermitiane

Matrici hermitiane

La matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice **hermitiana** se $A = A^H$ essendo A^H la matrice di elementi:

$$a_{ij}^H = \overline{a_{ji}}$$

(\bar{a} è il **complesso coniugato** di a).

Osservazione Se A è una matrice ad elementi reali allora $A^H = A^T$.

Teorema

- ▶ Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice hermitiana, allora i suoi autovalori sono **reali**.
- ▶ Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice hermitiana, allora i suoi autovettori sono a due a due **ortogonali**.

Condizionamento degli autovalori

Teorema di Bauer-Fike

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice diagonalizzabile, cioè esistono $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ non singolare e $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonale tali che $\Lambda = X^{-1}AX$.

Se μ è un autovalore della matrice $A + E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ allora

$$\min_{\lambda} |\lambda - \mu| \leq K_p(X) \|E\|_p$$

essendo $K_p(X)$ il numero di condizionamento di X nella norma $\|\cdot\|_p$.

Localizzazione degli autovalori

Teorema di Gershgorin

Data la matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, costruiamo i seguenti cerchi del piano complesso:

$$R_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\} \quad i = 1, \dots, n$$

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}|\} \quad i = 1, \dots, n$$

Allora gli autovalori della matrice A sono contenuti sia nell'unione dei dischi R_i che dei dischi C_i , ossia

$$\lambda \in (\cup_{i=1}^n R_i) \cap (\cup_{i=1}^n C_i).$$

Inoltre, se p dischi R_i sono disgiunti dai rimanenti, si ha che esattamente p autovalori di A cadono nell'unione di questi dischi.

Localizzazione degli autovalori

La function `gershgorin.m` disegna i cerchi di Gershgorin di una assegnata matrice A . Si deve usare il seguente comando

```
gershgorin(A)
```

In **blu** sono disegnati i cerchi R_i costruiti per righe;
in **rosso** sono disegnati i cerchi C_i costruiti per colonne.

Metodo delle potenze

Metodo delle potenze

Data una matrice **diagonalizzabile** A con autovalori che soddisfano:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Il **metodo delle potenze** permette di calcolare l'**autovettore** associato all'**autovalore di modulo massimo**.

Usando il **rapporto di Rayleigh** si ottiene anche un'approssimazione dell'autovalore di modulo massimo.

Algoritmo delle potenze

- ▶ Dati A , x_0 , $y_0 = x_0 / \|x_0\|$;
- ▶ per $k = 1, 2, \dots$ fino a convergenza
 - ▶ calcola $x_k = Ay_{k-1}$;
 - ▶ normalizza $y_k = x_k / \|x_k\|$;
 - ▶ valuta l'autovalore $\lambda_k = y_k^H Ay_k$.

Test d'arresto

- ▶ differenza fra le ultime iterate: $|\lambda_k - \lambda_{k-1}| \leq tol |\lambda_k|$.

Metodo delle potenze inverse

Il metodo delle potenze inverse permette di calcolare l'autovettore associato all'autovalore di modulo minimo (purché diverso da zero) della matrice A .

Basta applicare il metodo delle potenze alla matrice A^{-1} .

Algoritmo delle potenze inverse

- ▶ Dati A , x_0 , $y_0 = x_0 / \|x_0\|$;
- ▶ calcola la fattorizzazione di $PA = LU$
- ▶ per $k = 1, 2, \dots$ fino a convergenza
 - ▶ risolve $Ax_k = y_{k-1}$ usando la fattorizzazione di A ;
 - ▶ normalizza $y_k = x_k / \|x_k\|$;
 - ▶ valuta $\mu_k = y_k^H A^{-1} y_k$.

l'autovalore è dato da $\lambda_k = 1/\mu_k$

Metodo delle potenze inverse con shift

Per calcolare l'autovettore associato all'autovalore più vicino ad un certo valore μ si applica uno **shift** alla matrice A come segue:

$$(A - \mu I)x = (\lambda - \mu)x.$$

L'autovalore più vicino a μ è quindi tale che $|\lambda - \mu|$ sia minimo, quindi si applica il **metodo delle potenze inverse** alla matrice $A - \mu I$.

Algoritmo delle potenze inverse con shift

- ▶ Dati A , μ , x_0 , $y_0 = x_0 / \|x_0\|$;
- ▶ calcola la fattorizzazione di $P(A - \mu I) = LU$
- ▶ per $k = 1, 2, \dots$ fino a convergenza
 - ▶ risolve $(A - \mu I)x_k = y_{k-1}$ usando la fattorizzazione di $A - \mu I$;
 - ▶ normalizza $y_k = x_k / \|x_k\|$;
 - ▶ valuta $\eta_k = y_k^H (A - \mu I)^{-1} y_k$.

l'autovalore è dato da $\lambda_k = \mu + 1/\eta_k$

Metodo delle potenze per sottospazi

Si può generalizzare il metodo delle potenze in modo di calcolare autospazi di dimensione arbitraria p .

Algoritmo delle potenze per sottospazi

- ▶ Dati $A, \mu, Q_0 \in \mathbb{C}^{n \times p}$ tale che $Q^H Q = I_p$;
- ▶ per $k = 1, 2, \dots$ fino a convergenza
 - ▶ $Z_k = A Q_{k-1}$ prodotto per A ;
 - ▶ $Q_k R_k = Z_k$ fattorizzazione QR.

Function di Matlab per il calcolo di autovalori ed autovettori

eig

La function `eig` calcola tutti gli autovalori e gli autovettori della matrice A mediante il metodo QR.

- ▶ `e=eig(A)` fornisce un vettore contenente gli autovalori di A .
- ▶ `[V,D]=eig(A)` fornisce la matrice diagonale D , contenente gli autovalori sulla diagonale, e la matrice V , contenente gli autovettori (colonna per colonna) tali che $A * V = V * D$.

Function di Matlab per il calcolo di autovalori ed autovettori

eigs

La function `eigs` calcola gli autovalori di modulo più grande e gli autovettori associati di una **matrice in formato sparse** applicando il metodo di Arnoldi.

- ▶ `e=eigs(A)` calcola i sei autovalori più grandi in modulo.
- ▶ `[V,D]=eigs(A)` calcola la matrice diagonale D contenente i sei autovalori più grandi in modulo e la matrice V le cui colonne sono i corrispondenti autovettori.
- ▶ `eisg(A,k)` calcola i k autovalori di A più grandi in modulo.
- ▶ `eigs(A,k,sigma)` calcola k autovalori con i seguenti criteri:
 - `sigma` scalare k autovalori più vicini a `sigma`
 - `sigma='lm'` k autovalori più grandi
 - `sigma='sm'` k autovalori più piccoli
 - `sigma='be'` k autovalori più grandi e più piccoli

Esercizi

Esercizio 1

Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 - 7i & 2 & 1 & 0 \\ -2 & i & 0 & 1 - i \\ 3 + 2i & 1 & 2 & 4i \\ 0 & 0 & i & -7 \end{pmatrix}$$

- ▶ Usare la function `gershgorin` per localizzare gli autovalori delle due matrici.
- ▶ Calcolare autovalori ed autovettori delle due matrici mediante la function `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin.
- ▶ Usare il metodo delle potenze `potenze` e delle potenze inverse con shift `shiftinv` per calcolare gli autovalori di modulo massimo, minimo e quelli più vicini ai centri dei cerchi di Gershgorin.

La function potenze

```
potenze.m
```

```
[lambda,x,iter]=potenze(A,x0,toll,nmax)
```

<code>lambda</code>	autovalore calcolato;
<code>x</code>	autovettore calcolato;
<code>iter</code>	numero di iterazioni per arrivare a convergenza;
<code>A</code>	matrice;
<code>x0</code>	vettore iniziale;
<code>toll</code>	tolleranza;
<code>nmax</code>	numero massimo di iterazioni

Le function `shiftinv`

```
shiftinv.m
```

```
[lambda,x,iter]=shiftinv(A,mu,x0,toll,nmax)
```

<code>lambda</code>	autovalore calcolato;
<code>x</code>	autovettore calcolato;
<code>iter</code>	numero di iterazioni per arrivare a convergenza;
<code>A</code>	matrice;
<code>mu</code>	shift;
<code>x0</code>	vettore iniziale;
<code>toll</code>	tolleranza;
<code>nmax</code>	numero massimo di iterazioni

Esercizio

Esercizio 2

Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- ▶ Usare la function `gershgorin` per localizzare gli autovalori.
- ▶ Calcolare gli autovalori con la function `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin.
- ▶ Usare la function `potenze` per calcolare l'autovalore di modulo massimo.
- ▶ Usare la function `shiftinv` con shift $\mu = 0$ per calcolare l'autovalore di modulo minimo.
- ▶ Osservato che `shiftinv` con shift $\mu = 0$ non converge e che gli autovalori di modulo minimo sono complessi coniugati, trovare degli shift che permettano di calcolarli.

Esercizio

Esercizio 3

Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & 10 & 12 \\ 6 & -6 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

- ▶ Calcolare gli autovalori e gli autovettori usando il comando `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin;
- ▶ calcolare l'autovalore di modulo massimo e l'autovettore associato mediante la function `potenze`, usando come vettore iniziale $x_0 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]'$ e $x_0 = [0 \ 0 \ 1 \ -1]'$;
- ▶ verificare che uno dei due vettori iniziali risulta ortogonale all'autovettore calcolato (usare `tol=eps`).

Esercizio

Esercizio 4

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3.5 + i/3 & -2.5 + i/3 & -2.5 + i & 4 \\ 1.5 + i/6 & 1.5 + i/6 & -3.5 + i/2 & 2 \\ i/6 & -2 + i/6 & 3 + i/2 & 2 \\ -0.5 + i/3 & 2.5 - 2i/3 & -1.5 & -1 + i \end{pmatrix}$$

- ▶ Calcolare gli autovalori e gli autovettori usando il comando `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin;
- ▶ calcolare l'autovalore di modulo massimo e l'autovettore associato mediante la function `potenze`, usando come vettore iniziale $x_0 = [0 \ 1 \ 0 \ 1]'$ e $x_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 1]'$ e tolleranza pari alla precisione di macchina `eps`;
- ▶ verificare che uno dei due vettori iniziali risulta ortogonale all'autovettore calcolato.

Esercizio sull'uso di `eigs`

Costruire usando la function `Laplace` la matrice dei coefficienti associata al seguente problema differenziale agli autovalori:

$$\begin{aligned} -u_{xx} - u_{yy} &= \lambda u && \text{in } [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u &= 0 && \text{sul bordo del quadrato.} \end{aligned}$$

Usando il comando `eigs` calcolare i 10 autovalori più piccoli e gli autovettori associati.

Verificare che gli autovettori sono le approssimazioni dei numeri $n^2 + m^2$ per n e m interi e positivi.

Plottare con il comando `graf_lapl` i corrispondenti autovettori. Si osserva che gli autovettori forniscono un'approssimazione delle funzioni $u(x, y) = \sin(nx)\sin(my)$.