Heat equation

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sezione di Matematica,
http://lucia-gastaldi.unibs.it

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BRESCIA

Outline

Heat equation

Let Ω an open, connected, smooth domain, we want to determine the temperature distribution $u(\mathbf{x}, t)$ satisfying the following equation:

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \mathrm{div}(K \nabla u(\mathbf{x}, t)) = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega,\ 0 < t \leq T \\
u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) & x \in \partial\Omega,\ 0 < t \leq T \\
u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & x \in \Omega
\end{array}
$$

where $K = k/\rho c$ is thermal diffusion coefficient (k thermal conductivity, ρ mass density, c specific heat capacity) and $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Weak formulation

Assume $g = 0$.
Let $V = \{v : \int_\Omega (v^2 + |\nabla v|^2) d\mathbf{x} < +\infty, v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$.
Multiplying the equation by v and integrating by parts, we have

Weak problem

For all $t \in [0, T]$, find $u(t) \in V$ such that

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + K \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x}, t) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$= \int_\Omega f(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall v \in V$$

$$u(0) = u_0.$$

Semi-discretization in space

Consideriamo una reticolazione regolare $\mathcal{T}_h$ di Ω ottenuta suddividendo Ω in triangoli e consideriamo lo spazio degli elementi finiti lineari a tratti, ossia

$$V_h = \{v \in V : v|_T \in P^1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Poniamo $h = \max_T h_T$, essendo h_T il diametro dell'elemento $T \in \mathcal{T}_h$.

Problema semidiscreto

Per ogni $t \in [0, T]$, trovare $u_h(t) \in V_h$ tale che

$$\int_\Omega \frac{\partial u_h}{\partial t}(t) v_h d\mathbf{x} + \int_\Omega K \nabla u_h(t) \nabla v_h d\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x}, t) v_h d\mathbf{x} \ \forall v_h \in V_h$$

$$u_h(0) = u_{0,h},$$

essendo $u_{0,h} \in V_h$ un'approssimazione di u_0.

Derivation of the system of ODEs

Indicando con φ_i le funzioni di base, la soluzione si scrive

$$u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)\varphi_j(x).$$

Sia $\mathbf{u}_h(t)$ la funzione a valori vettoriali le cui componenti sono date da $\alpha_j(t)$, sostituendo nel problema discreto e prendendo $v_h = \varphi_i$ si ottiene:

$$M\mathbf{u}_h'(t) + A\mathbf{u}_h(t) = \mathbf{F}(t), \quad t \in [0,T]$$
$$\mathbf{u}_h(0) = \mathbf{u}_{0,h}.$$

essendo M la matrice di massa, A la matrice di rigidezza e $\mathbf{F}$ il termine noto definiti come segue:

$$M_{ij} = \int_\Omega \varphi_j\varphi_i d\mathbf{x} \quad A_{ij} = \int_\Omega K\nabla\varphi_j\nabla\varphi_i d\mathbf{x} \quad \mathbf{F}_i(t) = \int_\Omega f(x,t)\varphi_i d\mathbf{x}.$$

Infine $u_{0,h}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} u_0(\mathbf{x}_j)\varphi_j(\mathbf{x})$, interpolata di $\mathbf{u}_0$.

θ-method

Posto $\Delta t = T/M$ passo di discretizzazione in tempo,
$t_k = k\Delta t$, $\mathbf{u}_h^k \approx \mathbf{u}_h(t_k)$.

θ-metodo

Per $0 \leq \theta \leq 1$, si calcola

$$M\mathbf{u}_h^{k+1} = M\mathbf{u}_h^k + \Delta t \left(\theta A\mathbf{u}_h^{k+1} + (1-\theta)K\mathbf{u}_h^k)\right) + \Delta t \left(\theta \mathbf{F}^{k+1} + (1-\theta)\mathbf{F}^{\prime}\right.$$

$$\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{u}_{0,h}.$$

Quindi la soluzione si calcola risolvendo ad ogni passo temporale il sistema:

$$(M+\theta\Delta t A)\mathbf{u}_h^{k+1} = (M-(1-\theta)\Delta t A)\mathbf{u}_h^k + \Delta t \left(\theta \mathbf{F}^{k+1} + (1-\theta)\mathbf{F}^k\right)$$

Properties of the θ-method

Per $\theta = 0$ si ha il metodo di Eulero esplicito.
Per $\theta = 1$ si ha il metodo di Eulero implicito.
Per $\theta = 1/2$ si ha il metodo di Crank-Nicolson.

Ordine: il metodo è del primo ordine per $\theta \neq 1/2$, ed è del secondo ordine per $\theta = 1/2$.

Assoluta stabilità:
per $\theta \geq 1/2$ il metodo è incondizionatamente assolutamente stabile;
per $\theta < 1/2$ si ha la condizione

$$\Delta t \leq \frac{2}{(1 - 2\theta)\lambda_{h,\max}}$$

dove $\lambda_{h,\max}$ è il massimo autovalore della matrice $M^{-1}K$.
Si dimostra che $\lambda_{h,\max} \approx 1/h^2$.

Function for the 1D problem

```
[t,x,u]=heat(mu,f,u0,alfa,beta,a,b,T,Nx,Nt,theta,BC)
```

Input

`mu`	Diffusion coefficient
`f`	heat source ($f(x,t)$)
`u0`	initial datum
`a, b`	end points
`alfa, beta`	boundary data (funct. of t)
`T`	time interval
`Nx, Nt`	numbers of subdivisions in space and time
`theta`	parameter

Output

`x,t`	vectors of nodes and times
`u`	values of the solution (array `NxM`)

Traccia

- calcolare h e Δt
- costruire la matrice A
- costruire la matrice $A1 = M + \frac{\mu}{h^2}\theta\Delta t A$
- costruire la matrice $A2 = M - \frac{\mu}{h^2}(1-\theta)\Delta t A$
- fattorizzare $A1$ con Choleski
- calcolare `f0` ossia il vettore $\mathbf{f}$ al tempo $t = 0$
- memorizzare nella prima colonna di `u` il dato iniziale
- ciclo di avanzamento in tempo
  - calcolare il termine noto del sistema lineare in passi successivi:
    - moltiplicare la matrice $A2$ per il valore della soluzione al passo precedente contenuto in `u(:,n)`
    - aggiungere $(1-\theta)\mathbf{f}^n$ ($\mathbf{f}^n$ memorizzato in `f0`)
    - calcolare $\mathbf{f}^{n+1}$ e memorizzarlo in `f0`
    - aggiungere $\theta\mathbf{f}^{n+1}$
  - calcolare la soluzione usando la fattorizzazione (salvare la soluzione in `u(:,n+1)`)

Exercize 1

Risolvere la seguente equazione del calore:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in (0,1),\ 0 < t < 1 \\
&u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad 0 < t < 1 \\
&u(x,0) = x(1-x) \quad x \in (0,1)
\end{aligned}
$$

Exercize 2

Consideriamo una barra di alluminio di densità $\rho = 2700\ Kg/m^3$, di capacità di calore specifico $c = 897 J/(kgK)$, lunga 3 metri e dotata di conducibilità termica pari a $k = 273\ W/mK$ (Watt per Kelvin-metri). Si vuole studiare l'evoluzione della temperatura nella barra partendo dalla condizione iniziale $T(x, 0) = 500\ K$ se $x \in (1, 2)$ e 250 K altrimenti. Le condizioni al bordo sono $T(0, t) = T(3, t) = 250\ K$.
Calcolare la soluzione per diversi valori di θ nell'intervallo $(0, 2)$ secondi con passo temporale opportuno.

Use of `pdetool`

- Ripetere gli stessi passi utilizzati per il caso stazionario per definire la geometria e le condizioni al bordo.
- Specificare il tipo di equazione differenzale, assegnando i dati dei coefficienti e del termine noto.
- Costruire la mesh.
- Nel menù **Solve** selezionare *Parameters*. Assegnare gli istanti di tempo nella casella *Time* e la condizione iniziale nella casella `u(t0)`. Poi si risolve.
- Nel menù **Plot** è possibile selezionare *Animation*.

Esercizio 1

Risolvere la seguente equazione del calore:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}\left(\frac{1}{2\pi^2}\nabla u\right) = 0 \quad \in \Omega = (0,1) \times (0,1),\ 0 \leq t \leq 5$$
$$u(t) = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, 0 \leq t \leq 5$$
$$u(x,y,0) = \sin(\pi x)\sin(\pi y) \quad (x,y) \in \Omega$$

La soluzione esatta è: $u(x,y,t) = e^{-t}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$.

Esercizio 2

Consideriamo una piastra quadrata di alluminio di densità $\rho = 2700\ Kg/m^3$, di capacità di calore specifico $c = 897 J/(kgK)$, di lato 3 metri e dotata di conducibilità termica pari a $k = 273\ W/mK$ (Watt per Kelvin-metri).
Si vuole studiare l'evoluzione della temperatura nella barra partendo dalla condizione iniziale $T(x, y, 0) = 500\ K$ se (x, y) appartiene al quadrato di lato 1 al centro della piastra e 250 K altrimenti. Le condizioni al bordo sono $T(t) = 250\ K$.
Calcolare la soluzione nell'intervallo $(0, 2000)$ con passo temporale $\Delta t = 0.25$.