Approssimazione di dati

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,
http://dm.ing.unibs.it/gastaldi/

Indice

Legge di Ohm

La **legge di Ohm** afferma che la differenza di potenziale V ai capi di un conduttore elettrico e l'intensità di corrente elettrica I che lo attraversa sono legati dalla relazione

$$V = R \cdot I$$

essendo R la resistenza elettrica del conduttore.

Legge di Ohm

La **legge di Ohm** afferma che la differenza di potenziale V ai capi di un conduttore elettrico e l'intensità di corrente elettrica I che lo attraversa sono legati dalla relazione

$$V = R \cdot I$$

essendo R la resistenza elettrica del conduttore.

Supponiamo di avere un apparecchio per misurare la differenza di potenziale agli estremi di un filo conduttore e un amperometro per misurare l'intensità di corrente corrispondente.
I risultati sperimentali (contenuti nel file `datiOhm.m`) sono:

```
I=[-1,6,13,16,17,25,28,29,33,36,39,43,44];
V=[0,1,1.3,1.6,1.9,2.3,2.6,2.9,3.2,3.5,3.9,4.2,4.5];
V=V/4.5*7;
```

Si vuole rappresentare la legge che regola la relazione tra I e V.

Legge di Ohm (segue)

- Rappresentare i dati sperimentali marcandoli con un pallino.

Legge di Ohm (segue)

- Rappresentare i dati sperimentali marcandoli con un pallino.
- Interpolare i dati sperimentali usando un polinomio interpolatote di grado opportuno.

Legge di Ohm (segue)

- Rappresentare i dati sperimentali marcandoli con un pallino.
- Interpolare i dati sperimentali usando un polinomio interpolatote di grado opportuno.
- Interpolare i dati usando le spline.

Legge di Ohm (segue)

- Rappresentare i dati sperimentali marcandoli con un pallino.
- Interpolare i dati sperimentali usando un polinomio interpolatote di grado opportuno.
- Interpolare i dati usando le spline.
- Trovare la retta di regressione lineare.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati lineari

Siano dati (x_i, y_i) per $i = 0, \dots, n$ con n abbastanza grande.
L'interpolazione in questo caso non dà risultati significativi.
Cerchiamo un'approssimazione della nostra quantità fisica nella forma

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x) \quad \text{essendo } \varphi_j \text{ funzioni assegnate.}$$

Imponendo il passaggio per tutti i punti si ottiene il sistema

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i) = y_i, \quad \text{per } i = 0, \dots, n$$

di $n + 1$ equazioni in $m + 1$ incognite con $m << n$, che difficilmente ha soluzione.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati lineari

Siano dati (x_i, y_i) per $i = 0, \ldots, n$ con n abbastanza grande.
L'interpolazione in questo caso non dà risultati significativi.
Cerchiamo un'approssimazione della nostra quantità fisica nella forma

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x) \quad \text{essendo } \varphi_j \text{ funzioni assegnate.}$$

Imponendo il passaggio per tutti i punti si ottiene il sistema

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i) = y_i, \quad \text{per } i = 0, \ldots, n$$

di $n + 1$ equazioni in $m + 1$ incognite con $m << n$, che difficilmente ha soluzione.
Per $i = 0, \ldots, n$ e $j = 0, \ldots, m$, poniamo $A_{ij} = \varphi_j(x_i)$, $b_i = y_i$ e $x_j = a_j$;
il sistema $Ax = b$ è sovradeterminato.

Minimi quadrati lineari

Minimi quadrati lineari

Trovare x che renda minima la seguente quantità:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{m+1}} \|Ax - b\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^{m+1}} \sum_{i=0}^{n} \left(\left(\sum_{j=0}^{n} A_{ij} x_j \right) - b_i \right)^2 .$$

Regressione lineare I

Dati i punti (x_i, y_i) per $i = 0, \ldots, n$, vogliamo calcolare la retta $y = a + bx$ che meglio li approssima.
Il sistema diventa: $a + bx_i = y_i$ per $i = 0, \ldots, n$ e abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Si deve cercare il minimo della funzione:

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=0}^{n} (a + bx_i - y_i)^2$$

Regressione lineare I

Dati i punti (x_i, y_i) per $i = 0, \ldots, n$, vogliamo calcolare la retta $y = a + bx$ che meglio li approssima.
Il sistema diventa: $a + bx_i = y_i$ per $i = 0, \ldots, n$ e abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Si deve cercare il minimo della funzione:

$$\begin{aligned} \Phi(a, b) &= \sum_{i=0}^{n} (a + bx_i - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(a^2 + 2abx_i + b^2 x_i^2 - 2ay_i - 2bx_i y_i + y_i^2 \right) \end{aligned}$$

Regressione lineare I

Dati i punti (x_i, y_i) per $i = 0, \ldots, n$, vogliamo calcolare la retta $y = a + bx$ che meglio li approssima.
Il sistema diventa: $a + bx_i = y_i$ per $i = 0, \ldots, n$ e abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Si deve cercare il minimo della funzione:

$$\begin{aligned}
\Phi(a, b) &= \sum_{i=0}^{n} (a + bx_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(a^2 + 2abx_i + b^2 x_i^2 - 2ay_i - 2bx_i y_i + y_i^2 \right) \\
&= (n+1)a^2 + 2ab \sum_{i=0}^{n} x_i + b^2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 - 2a \sum_{i=0}^{n} y_i \\
&\quad - 2b \sum_{i=0}^{n} x_i y_i + \sum_{i=0}^{n} y_i^2
\end{aligned}$$

Regressione lineare II

$$\Phi(a,b) = (n+1)a^2 + 2ab\sum_{i=0}^{n} x_i + b^2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2$$
$$- 2a\sum_{i=0}^{n} y_i - 2b\sum_{i=0}^{n} x_i y_i + \sum_{i=0}^{n} y_i^2$$

Calcolando le derivate parziali si pone:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a}(a,b) = 2\left((n+1)a + b\sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{n} y_i\right) = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial b}(a,b) = 2\left(a\sum_{i=0}^{n} x_i + b\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \sum_{i=0}^{n} x_i y_i\right) = 0$$

Regressione lineare III

Si risolve quindi il sistema

$$\begin{pmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \displaystyle\sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=0}^n y_i \\ \displaystyle\sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

ossia

$$A^T A x = A^T y$$

Minimi quadrati lineari: caso generale

$$\boxed{\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2}$$

Si ha:

$$\|Ax - b\|^2 = (Ax - b)^T (Ax - b)$$

Minimi quadrati lineari: caso generale

$$\boxed{\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|^2 &= (Ax - b)^T(Ax - b) \\ &= x^TA^TAx - x^TA^Tb - b^TAx + b^Tb \end{aligned}$$

Minimi quadrati lineari: caso generale

$$\boxed{\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|^2 &= (Ax - b)^T (Ax - b) \\ &= x^T A^T A x - x^T A^T b - b^T A x + b^T b \\ &= x^T A^T A x - 2 b^T A x + b^T b \end{aligned}$$

Per trovare il minimo si annulla il gradiente, ottenendo il sistema lineare

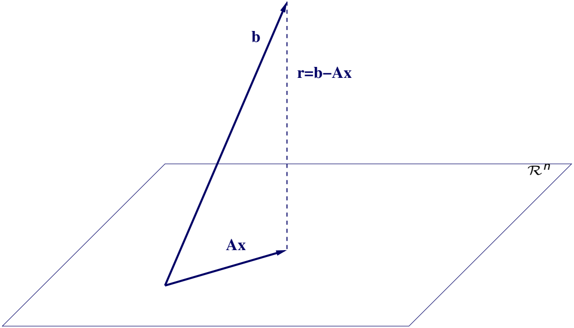
$$A^T A x = A^T b$$

detto **sistema delle equazioni normali**.

Sistema delle equazioni normali

$$\boxed{A^T A x = A^T b}$$

- La matrice $A^T A$ è una matrice quadrata $n \times n$.
- La matrice $A^T A$ è simmetrica e definita positiva se A è a rango pieno. In questo caso la soluzione è unica.
- La matrice $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ è detta **matrice pseudo-inversa** di A.



Minimi quadrati lineari in Matlab

Per calcolare il polinomio di grado m che approssima i punti (x_i, y_i) per $i = 0, \ldots, n$ nel senso dei minimi quadrati lineari si usa la function `polyfit` con il comando

```
p=polyfit(x,y,m)
```

Identificazione di parametri

Il file `dati.m`, contiene le osservate y_i di una certa quantità, prese per valori di t equispaziati.

- Trovare la retta di regressione lineare e plottare in una stesso grafico la retta ed i punti assegnati.
- In una seconda figura plottare i residui $y(t_i) - y_i$. Osservare che c'è un valore dei residui molto più grande degli altri. Chiamiamo il valore corrispondente valore anomalo.
- Eliminare l'osservata corrispondente al valore del residuo massimo. Ricalcolare la retta di regressione lineare e ripetere i grafici del caso precedente.
- Osservare l'andamento del residuo.
- Fittare i dati (escluso il valore anomalo) con un modello della forma seguente:

$$M(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \sin t.$$

- Plottare il modello con una linea continua, insieme ai dati (marcati con o) e al valore anomalo (marcato con *).

find

Il comando `find` serve per trovare le componenti di un vettore diverse da zero.

Esempio

Posto `x=[0 1 2 3 0 2 1]`, il comando `I=find(x)` fornisce il risultato `I=[2 3 4 6 7]`.
Ricordando che una variabile logica è vera se ha valore diverso da zero, il comando `J=find(x==1)` fornisce gli indici delle componenti che sono uguali a uno, quindi `J=[2 7]`.

Eliminazione di una componente

- Per eliminare la componente di posto `i` dal un vettore riga `v`: `v1=[v(1:i-1),v(i+1:end)]`.
- Per eliminare la componente di posto `i` dal un vettore colonna `w`: `w1=[w(1:i-1);w(i+1:end)]`.

Costruzione di una matrice per colonne

Per fittare i dati con il modello $M(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \sin(t)$, si deve calcolare il valore di $M(t_i)$ per ogni i e poi si cerca $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ in modo tale che $\underline{\beta}$ fornisca il valore minimo di

$$\sum_{i=1}^{n}(M(t_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\beta_1 + \beta_2 t_i + \beta_3 \sin(t_i) - y_i)^2.$$

Questo è equivalente a risolvere il sistema sovradeterminato $A\underline{\beta} = \underline{y}$ essendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \sin(t_1) \\ 1 & t_2 & \sin(t_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & \sin(t_n) \end{bmatrix} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Se `t` è il vettore colonna che contiene i valori della variabile t, la matrice può essere costruita per colonne con il comando

```
A=[ones(size(t)),t,sin(t)]
```