Integrazione numerica

Lucia Gastaldi

Dipartimento di Matematica,
http://dm.ing.unibs.it/gastaldi/

Laboratorio - 5 marzo 2007

Outline

1. Formule di quadratura semplici e composite
   - Formule di quadratura
   - Grado di precisione
   - Formule di base
   - L'integrazione numerica con MATLAB
2. Formule adattive
3. Integrazione di funzioni di 2 variabili
   - Integrazione di funzioni di 2 variabili

Integrazione di funzioni

Problema

Data la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, si calcoli il valore dell'integrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Una **formula di quadratura** ci permette di ottenere un valore approssimato dell'integrale della funzione a partire dai valori di f come segue:

$$\mathcal{Q}(f; a, b) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i).$$

I punti x_i si dicono **nodi**;
i coefficienti ω_i si dicono **pesi**.

Grado di precisione della formula di quadratura

Definizione

Si dice che una **formula di integrazione numerica** ha **grado di precisione** p se vale che

$$
\begin{array}{l}
I(f) = \mathcal{Q}(f) \text{ per ogni polinomio } f \text{ di grado } \leq p; \\
I(f) \neq \mathcal{Q}(f) \text{ per ogni polinomio } f \text{ di grado } > p.
\end{array}
$$

Formula del punto medio

Nodi: punto medio dell'intervallo $(a+b)/2$

Formula del punto medio

$$\mathcal{Q}_0(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Grado di precisione: 1

Formula composita del punto medio

$$\mathcal{Q}_0^c(f) = H \sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) \quad \text{essendo } H = \frac{b-a}{N}.$$

Errore: $E_0^c(f) = I(f) - \mathcal{Q}_0^c(f) = \frac{b-a}{24} H^2 f''(\xi_0)$

Formula dei trapezi

Nodi: gli estremi dell'intervallo a, b.

Formula dei trapezi

$$\mathcal{Q}_1(f) = \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right).$$

Grado di precisione: 1

Formula composita dei trapezi

$$\mathcal{Q}_1^c(f) = H\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2}\right) \quad \text{essendo } H = \frac{b-a}{N}.$$

Errore: $E_1^c(f) = I(f) - \mathcal{Q}_1^c(f) = -\frac{b-a}{12} H^2 f''(\xi_0)$

Formula di Cavalieri-Simpson

Nodi: gli estremi ed il punto medio dell'intervallo a, b, $(a+b)/2$.

Formula di Cavalieri-Simpson

$$\mathcal{Q}_2(f) = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Grado di precisione: 3

Formula composita di Cavalieri-Simpson

$$\mathcal{Q}_2^c(f) = \frac{H}{6}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + 4\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) + f(b)\right)$$

Errore: $E_2^c(f) = I(f) - \mathcal{Q}_2^c(f) = -\frac{b-a}{180}\frac{H^4}{16} f^{(4)}(\xi_0)$

Formula di Gauss

Nodi: $x_0 = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$, $x_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Formula di Gauss

$$\mathcal{Q}_g(f) = \frac{(b-a)}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right).$$

Grado di precisione: 3

Formula composita di Gauss

$$\mathcal{Q}_g^c(f) = \frac{H}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(f(\gamma_{-k}) + f(\gamma_{+k})\right)$$

essendo $H = (b-a)/N$, $\gamma_{\mp k} = x_{k-1} + \left(1 \mp 1/\sqrt{3}\right) H/2$.

Errore: $E_g^c(f) = I(f) - \mathcal{Q}_g^c(f) = -\frac{b-a}{4320} H^4 f^{(4)}(\xi_0)$

Function **quadratura**

La function **quadratura** calcola il valore approssimato dell'integrale di una funzione mediante le formule composite. Per usare la function dare il comando:

```
[I] =quadratura(f,a,b,N,metodo)
```

Input `f` nome della funzione da integrare;
`a,b` estremi dell'intervallo;
`N` numero degli intervalli di suddivisione;
`metodo`=1 uso punto medio;
`metodo`=2 uso trapezi;
`metodo`=3 uso Simpson;
`metodo`=4 uso Gauss.

Esercizio

Testare la function `quadratura` calcolando gli integrali:

$$\int_{-1}^{2} x^4\,dx = \frac{33}{5}, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = 2, \quad \int_0^1 e^x\,dx = e-1.$$

Esercizio

Esercizio

Scrivere un programma di tipo script per valutare al variare di N (numero degli intervallini di suddivisione) e del metodo usato, l'errore di integrazione $E_{metodo,N}$

$$E_{metodo,N} = |I(f) - I_{metodo,N}(f)|.$$

Riportare in un grafico in scala bilogaritmica l'errore in funzione di N. Se `N` e `EN` sono i vettori che contengono il numero di intervallini di suddivisione e l'errore, usare il comando `loglog` con la seguente sintassi:

```
loglog(N,EN)
```

Testare il programma utilizzando gli integrali dati precedentemente. L'ordine di convergenza è in accordo con la stima teorica dell'errore?

Traccia dell'esercizio

1. Assegnare la funzione `f`, gli estremi dell'intervallo `a` e `b` ed il valore esatto dell'integrale `If`.
2. Assegnare il vettore `N=[5,10,50,100,200,500]`.
3. Per ciascun metodo (`for metodo=1:4`):
   - Per ciascun valore di `N` (`for i=1:length(N)`):
     - Calcolare il valore dell'integrale approssimato `Iapprox`.
     - Calcolare l'errore relativo: `E(metodo,i)=abs(If-Iapprox)/abs(If)`.
4. Plottare gli errori in scala bilogaritmica per ciascun metodo confrontandoli con le stime teoriche:

```
loglog(N,E(1,:),N,E(2,:),N,E(3,:),N,E(4,:),...
      N,1./N.^2,N,1./N.^4)
legend('Punto medio','Trapezi','Simpson',...
      'Gauss','ordine 2','ordine 4')
```

L'integrazione numerica con MATLAB

Funzione	**Significato**
trapz	Integrazione numerica con la formula dei trapezi.
quad	Quadratura adattiva con formula di Simpson.
quadl	Quadratura adattiva con formula di Gauss-Lobatto.
quadgk	Quadratura adattiva con formula di Gauss-Kronrod.
	Supporta anche intervalli illimitati e funzioni con singolarità.
dblquad	Formula di quadratura per integrali doppi su rettangoli.

`trapz`

```
Z = trapz(X,Y)
```

`X,Y` sono i vettori contenti rispettivamente ascisse e ordinate dei punti.

quad, quadl

Sia `f` la stringa o la function contenente f.

Calcolo di $\int_a^b f(x)dx$

```
>> q=quad(f,a,b)        formula di Simpson adattativa;
>> q=quadl(f,a,b)       formula di Gauss-Lobatto adattativa;
```

`q=quadl(f,a,b,tol)`

modifica il valore della tolleranza usata (default `1.e-6`).

`[q,fcnt]=quadl(f,a,b)`

restituisce il numero di valutazioni della funzione.

`[q,fcnt]=quadl(f,a,b,[],trace)`

se `trace` assume un valore diverso da zero, vengono mostrati i valori di `[fcnt a b-a Q]` durante il procedimento. Le parentesi `[]` servono per tenere il posto della tolleranza ed usare il suo valore di default.

Esercizio

Si considerino i seguenti integrali:

$$\int_{-1}^{4} \left(xe^{-x} - \frac{e^{-1}}{2} \right) \, dx = -5(e^{-4} + \frac{e^{-1}}{2}); \quad \int_{0}^{3} \left| xe^{-x} - \frac{e^{-1}}{2} \right| \, dx;$$

$$\int_{0}^{3} \sqrt[3]{|x^2 - 3|} \, dx; \quad \int_{0}^{3} |x^2 - 3|^{4/3} \, dx;$$

Analizzare l'ordine di convergenza usando lo script già predisposto. Per calcolare il valore dell'integrale esatto (se non assegnato) usare la function di Matlab `quadl` con tolleranza `1.e-10`.

Formule adattive

Il passo di integrazione H può essere scelto in modo da garantire che l'errore sia inferiore ad una tolleranza ε prestabilita.
Se usiamo la formula di Simpson si dovrebbe trovare H tale che

$$\frac{b-a}{180}\,\frac{H^4}{16}\,M < \varepsilon, \qquad \text{essendo } M = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

La funzione $\arctan(ax)$

Sia $f(x) = \arctan(ax)$, allora si ha

$$f^{(4)}(x) = -\frac{24a^7x^3 - 24a^5x}{(a^2x^2+1)^4}$$

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = \left[x\arctan(ax) - \frac{1}{2a}\log(a^2x^2+1)\right]_{-1}^{5}$$

Esercizio

Esercizio

- Per $a = 1$ ed $a = 10$, fare il grafico della funzione $f(x) = \arctan(ax)$ e della sua derivata quarta sull'intervallo $[-1, 5]$ in due figure differenti.
- Determinare
$$M = \max_{-1 \leq x \leq 5} |f^{(4)}(x)|$$
e trovare il valore di H per cui l'errore è minore di `tol=1.e-6` per $a = 1$ e $a = 10$.
- Calcolare il valore dell'integrale usando la formula di Cavalieri-Simpson composita con il valore di H trovato al punto precedente.
- Confrontare l'errore relativo ottenuto ed il numero di valutazioni della funzione effettuate con quelli dati dalla funzione `quad` di Matlab.

Integrazione di funzioni di 2 variabili

Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ un dominio normale. Per calcolare l'integrale doppio di una funzione $f(x, y)$ uso la formula di riduzione:

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

dblquad

`II=dblquad(FUN,XMIN,XMAX,YMIN,YMAX)`

`II` è il valore approssimato dell'integrale doppio

$$\int\int_R f(x,y)\,dxdy$$

dove:

- `FUN` è il nome della function che contiene l'espressione di f;
- la regione di integrazione R è data da

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \texttt{XMIN} \leq x \leq \texttt{XMAX},\ \texttt{YMIN} \leq y \leq \texttt{YMAX}\}$$

Regioni non rettangolari

Si possono trattare anche regioni diverse da rettangoli, ponendo uguale a zero la funzione f fuori dal dominio di integrazione.

Esempio

Calcolare il volume della semisfera di raggio 1.

Consideriamo la funzione $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ sulla regione $1 - x^2 - y^2 \geq 0$.

Due possibilità:

- `f=inline('sqrt(max(1-(x.^2+y.^2),0))')`
- `f=inline('sqrt(1-(x.^2+y.^2)).* (x.^2+y.^2<=1)')`

L'integrale si calcola con il comando `dblquad(f,-1,1,-1,1)`

Esercizio

Esercizio

Usare la function dblquad per calcolare il seguente integrale:

$$\int\int_R (x+y)\, dxdy$$

dove

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } y - x - 1 \leq 0\}.$$

Fare il grafico della funzione e della regione di integrazione.