Integrazione numerica

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,
http://lucia-gastaldi.unibs.it

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BRESCIA

Indice

Integrazione di funzioni

Problema

Data la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, si calcoli il valore dell'integrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Una **formula di quadratura** ci permette di ottenere un valore approssimato dell'integrale della funzione a partire dai valori di f come segue:

$$\mathcal{I}(f; a, b) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i).$$

I punti x_i si dicono **nodi**;
i coefficienti ω_i si dicono **pesi**.

Grado di precisione della formula di quadratura

Definizione

Si dice che una **formula di integrazione numerica** ha **grado di precisione** p se vale che

$$\begin{array}{l} I(f) = \mathcal{I}(f) \text{ per ogni polinomio } f \text{ di grado } \leq p; \\ I(f) \neq \mathcal{I}(f) \text{ per ogni polinomio } f \text{ di grado } > p. \end{array}$$

Formula del punto medio

Nodi: punto medio dell'intervallo $(a+b)/2$

Formula del punto medio

$$\mathcal{I}_{PM}(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Grado di precisione: 1

Formula composita del punto medio

$$\mathcal{I}^c_{PM}(f) = H \sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) \quad \text{essendo } H = \frac{b-a}{N}.$$

Errore: $E^c_{PM}(f) = I(f) - \mathcal{I}^c_{PM}(f) = \dfrac{b-a}{24} H^2 f''(\xi_0)$

Formula dei trapezi

Nodi: gli estremi dell'intervallo a, b.

Formula dei trapezi

$$\mathcal{I}_T(f) = \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right).$$

Grado di precisione: 1

Formula composita dei trapezi

$$\mathcal{I}_T^c(f) = H\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2}\right) \quad \text{essendo } H = \frac{b-a}{N}.$$

Errore: $E_T^c(f) = I(f) - \mathcal{I}_T^c(f) = -\frac{b-a}{12} H^2 f''(\xi_0)$

Formula di Cavalieri-Simpson

Nodi: gli estremi ed il punto medio dell'intervallo a, b, $(a+b)/2$.

Formula di Cavalieri-Simpson

$$\mathcal{I}_{CS}(f) = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Grado di precisione: 3

Formula composita di Cavalieri-Simpson

$$\mathcal{I}_{CS}^{c}(f) = \frac{H}{6}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + 4\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) + f(b)\right)$$

Errore: $E_{CS}^{c}(f) = I(f) - \mathcal{I}_{CS}^{c}(f) = -\frac{b-a}{180}\frac{H^4}{16} f^{(4)}(\xi_0)$

Formule di Gauss - Legendre

Nella tabella qui sotto, n indica il grado dei polinomi interpolanti.

n	nodi $\hat{x}_i$ $i = 0, \ldots, n$	pesi w_i $i = 0, \ldots, n$
0	(0)	(2)
1	$(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	$(1, 1)$
2	$(-\sqrt{15}/5, 0, \sqrt{15}/5)$	$(5/9, 8/9, 5/9)$

n	G.d.P.	ordine
0	1	$CH^2 \max \lvert f^{(2)} \rvert$
1	3	$CH^4 \max \lvert f^{(4)} \rvert$
2	5	$CH^6 \max \lvert f^{(6)} \rvert$

Formula composita di Gauss

$$\mathcal{I}_G^c(f) = \frac{H}{2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_{ki}) \quad H = \frac{b-a}{N}$$

essendo $x_{ki} = x_{k-1} + \frac{H}{2}(1 + \hat{x}_i)$.

Formule di Gauss - Legendre - Lobatto

n	nodi $\hat{x}_i$ $i = 0, \ldots, n$	pesi w_i $i = 0, \ldots, n$
1	$(-1, 1)$	$(1, 1)$
2	$(-1, 0, 1)$	$(1/3, 4/3, 1/3)$
3	$(-1, -\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5, 1)$	$(1/6, 5/6, 5/6, 1/6)$

n	G.d.P.	ordine
1	1	$CH^2 \max \lvert f^{(2)} \rvert$
2	3	$CH^4 \max \lvert f^{(4)} \rvert$
3	5	$CH^6 \max \lvert f^{(6)} \rvert$

Formula composita di Gauss

$$\mathcal{I}_G^c(f) = \frac{H}{2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_{ki}) \quad H = \frac{b-a}{N}$$

essendo $x_{ki} = x_{k-1} + \frac{H}{2}(1 + \hat{x}_i)$.

Function **quadratura**

La function **quadratura** calcola il valore approssimato dell'integrale di una funzione mediante le formule composite. Per usare la function dare il comando:

```
[I] =quadratura(f,a,b,N,metodo)
```

Input
- `f` nome della funzione da integrare;
- `a,b` estremi dell'intervallo;
- `N` numero degli intervalli di suddivisione;
- `metodo`=1 uso punto medio;
- `metodo`=2 uso trapezi;
- `metodo`=3 uso Simpson.

Esercizio

Testare la function `quadratura` calcolando gli integrali:

$$\int_{-1}^{2} x^4\,dx = \frac{33}{5}, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = 2, \quad \int_0^1 e^x\,dx = e-1.$$

Esercizio

Esercizio 1

Scrivere un programma di tipo script per valutare al variare di N (numero degli intervalli di suddivisione) e del metodo usato, l'errore di integrazione $E_{metodo,N}$

$$E_{metodo,N} = |I(f) - \mathcal{I}_{metodo,N}(f)|.$$

Riportare in un grafico in scala bilogaritmica l'errore in funzione di N. Testare il programma utilizzando gli integrali dati precedentemente.
L'ordine di convergenza è in accordo con la stima teorica dell'errore?

Function quadGL e quadGLL

Le function `quadGL` e `quadGLL` permettono di calcolare l'integrale di una funzione usando le formule di quadratura di Gauss-Legendre e di Gauss-Legendre-Lobatto rispettivamente.

Esercizio facoltativo

Ripetere l'esercizio precedente usando le formule di quadratura gaussiane.

Effetto della regolarità della funzione

Esercizio 2

Per $\alpha = n + 1/3$ si calcoli l'integrale

$$\int_0^3 |x^2 - 5|^\alpha dx$$

usando le formule di integrazione numerica implementate nella function `quadratura`. Per ciascuna formula individuare il valore di n per il quale la formula di integrazione numerica converge con l'ordine previsto dalla teoria.
Per calcolare l'errore usare come valore esatto quello fornito con il seguente comando di Matlab

```
quad(f,a,b,1e-13)
```

L'integrazione numerica con MATLAB

```
q=integral(fun,xmin,xmax)
```

Calcola l'integrale della funzione `fun` da `xmin` a `xmax` usando un procedimento adattativo in base a una tolleranza di default.
Si possono calcolare:

- integrale definito;
- integrale su un intervallo illimitato;
- integrale di funzioni dipendenti da un parametro;
- integrale di funzione illimitata;
- integrale su contorni complessi;
- integrale di funzione a valori vettoriali.

Opzioni

```
q=integral(fun,xmin,xmax,Name,Value)
```

specifica opzioni addizionali

Name	**Value**
`'AbsTol'`	Tolleranza per l'errore assoluto (numero positivo)
`'RelTol'`	Tolleranza per l'errore relativo (numero positivo)
`'ArrayValued'`	Funzione a valori vettiariali

Opzioni

Sia q il valore ottenuto con `integral` e Q il valore dell'integrale esatto.

- `'AbsTol',1e-12` richiede $|q - Q| \leq 1e - 12$ approssimativamente 12 cifre decimali esatte.
- `'RelTol',1e-9` richiede $|q - Q|/|Q| \leq 1e - 9$ approssimativamente 9 cifre decimali esatte (valore di default $1e - 6$).

Se si usano insieme `AbsTol` e `RelTol` il risultato deve soddisfare almeno uno dei due criteri e non necessariamente entrambi.
La function `integral` cerca di soddisfare

```
abs(q - Q) <= max(AbsTol,RelTol*abs(q))
```

Le due tolleranze forniscono un modo per sfruttare al meglio accuratezza e tempo computazionale. Di solito la tolleranza relativa determina l'accuratezza dell'integrazione. Nel caso però di valori di $|q|$ piccoli, la tolleranza assoluta determina l'accuratezza dell'intagrazione.

Esercizio 3

Calcolare con la function `integral` i seguenti integrali:

$$\int_0^{3\pi/4} \sin(x)^3 \cos(x) dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \log(x)^2 dx$$

$$\int_0^{1} \log(x) dx$$

$$\int_0^{\infty} x^5 \, e^{-x} \, \sin(x) dx$$

quad, quadl

Nella distribuzione di Matlab del 2018 sono ancora disponibili le function `quad` e `quadl`.

Calcolo di $\int_a^b f(x)dx$

```
>> q=quad(f,a,b)
```
formula di Simpson adattativa;

```
>> q=quadl(f,a,b)
```
formula di Gauss-Lobatto adattativa;

- `q=quad(f,a,b,tol)` modifica il valore della tolleranza usata (default `1.e-6`).
- `[q,fcnt]=quad(f,a,b)` restituisce il numero di valutazioni della funzione.
- `[q,fcnt]=quadl(f,a,b,[],trace)`
  se `trace` assume un valore diverso da zero, vengono mostrati i valori di `[fcnt a b-a Q]` durante il procedimento. Le parentesi `[]` servono per tenere il posto della tolleranza ed usare il suo valore di default.

Esercizio 4

Dato $\alpha > 0$ si vuole calcolare il valore del seguente integrale:

$$\int_0^5 |x - \sqrt{5}|^\alpha dx = \frac{\sqrt{5}^{\alpha+1} + (5 - \sqrt{5})^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$$

Porre $\alpha = 2/3$

- Calcolare il valore dell'integrale usando la function `integral` con la tolleranza relativa ed assoluta poste uguali a 10^{-k} per $k = 1, \ldots, 12$. Riportare in una tabella i valori della tolleranza e dell'errore assoluto ottenuto.
- Ripetere il calcolo ponendo la sola tolleranza assoluta uguale a 10^{-k} per $k = 1, \ldots, 12$. Commentare i risultati ottenuti.
- Calcolare il valore dell'integrale anche con la function `quad` con gli stessi valori della tolleranza. Riportare in una tabella la tolleranza richiesta, l'errore assoluto e il numero di valutazioni della funzione.

Function **trapz**

```
Z = trapz(X,Y)
```

calcola l'integrale di una funzione data per punti essendo `X` il vettore delle ascisse e `Y` il vettore dei corrispondenti valori della funzione.

Function **trapz**

```
Z = trapz(X,Y)
```

calcola l'integrale di una funzione data per punti essendo `X` il vettore delle ascisse e `Y` il vettore dei corrispondenti valori della funzione.