

# Metodo degli elementi finiti in una dimensione

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,  
<http://lucia-gastaldi.unibs.it>

# Indice

- 1 Problemi di diffusione-reazione del secondo ordine
  - Formulazione debole
  - Metodo di Galerkin
  
- 2 Elementi finiti con condizioni di Dirichlet omogenee
  - Assemblaggio della matrice e del termine noto
  - Condizioni al bordo
  - Esercizi

# Problema di Dirichlet

## Problema in una dimensione

Sia

- $\Omega = ]a, b[$ ,
- $\mu \in \mathbb{R}$ , con  $\mu > 0$
- $\sigma \in \mathbb{R}$  tale che  $\sigma \geq 0$

Trovare  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\begin{aligned} -(\mu u'(x))' + \sigma u(x) &= f(x) \quad \text{per } x \in \Omega \\ u(a) &= \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{aligned}$$

## Teorema

Il problema è ben posto nel senso che **esiste una ed una sola soluzione** che dipende con continuità dai dati (**stabilità**).

# Problema con condizioni di Dirichlet omogenee

## Problema

$$\begin{aligned} -\mu u'' + \sigma u &= f \quad \text{in } \Omega = ]a, b[ \\ u(a) &= u(b) = 0 \end{aligned}$$

## Quadro funzionale

Posto

$$\mathbf{L}^2(a, b) = \left\{ v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b v^2 dx < +\infty \right\}$$

si definisce

$$H^1(a, b) = \{ v \in \mathbf{L}^2(a, b) : v' \in \mathbf{L}^2(a, b) \}$$

$$V = H_0^1(a, b) = \{ v \in H^1(a, b) : v(a) = v(b) = 0 \}$$

Moltiplichiamo l'equazione per  $v \in V$  (test function) e integriamo su  $(a, b)$ :

$$\int_a^b (-\mu u''(x) + \sigma u(x))v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx$$

Integrando per parti il primo termine si ha

$$\int_a^b \mu u''(x)v(x) dx = [\mu u'(x)v(x)]_a^b - \int_a^b \mu u'(x)v'(x) dx$$

da cui

$$\int_a^b (\mu u'(x)v'(x) + \sigma u(x)v(x)) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx$$

Moltiplichiamo l'equazione per  $v \in V$  (test function) e integriamo su  $(a, b)$ :

$$\int_a^b (-\mu u''(x) + \sigma u(x))v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx$$

Integrando per parti il primo termine si ha

$$\int_a^b \mu u''(x)v(x) dx = [\mu u'(x)v(x)]_a^b - \int_a^b \mu u'(x)v'(x) dx$$

da cui

$$\int_a^b (\mu u'(x)v'(x) + \sigma u(x)v(x)) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx$$

## Problema

Trovare  $u \in V$  tale che

$$\int_a^b (\mu u'(x)v'(x) + \sigma u(x)v(x)) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx \quad \forall v \in V.$$

## Metodo di Galerkin

Consideriamo uno spazio di dimensione finita  $V_h \subseteq V$  ( $h$  è il parametro di finezza della mesh)

### Problema discreto

Trovare  $u_h \in V_h$  tale che

$$\int_a^b (\mu u_h'(x) v_h'(x) + \sigma u_h(x) v_h(x)) dx = \int_a^b f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_h.$$

Supponiamo che  $V_h = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}\}$ , quindi  $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j$ .

Il problema si riscrive: trovare  $\underline{u} = \{u_j\}$  tale che per ogni  $i$

$$\int_a^b \left( \mu \left( \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j' \right) \varphi_i' + \sigma \left( \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j \right) \varphi_i \right) dx = \int_a^b f \varphi_i dx.$$

Per la linearità degli integrali si ottiene

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j \left( \int_a^b \mu \varphi_j' \varphi_i' + \sigma \varphi_j \varphi_i dx \right) = \int_a^b f \varphi_i dx \quad i = 1, \dots, N_h.$$

Indichiamo con  $K$  la matrice di *rigidezza* o *stiffness* e con  $M$  la matrice di *massa*, rispettivamente di elementi

$$K_{ij} = \int_a^b \varphi_j' \varphi_i' dx \quad M_{ij} = \int_a^b \varphi_j \varphi_i dx,$$

con  $\underline{\mathbf{F}}$  il vettore di *carico* con componenti

$$\underline{\mathbf{F}}_i = \int_a^b f \varphi_i dx.$$

Posto  $A = \mu K + \sigma M$ , il problema discreto è equivalente al seguente **sistema lineare**

$$A \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{F}}$$

essendo  $A$  **simmetrica e definita positiva**.



## Stime dell'errore

### Lemma

Posto

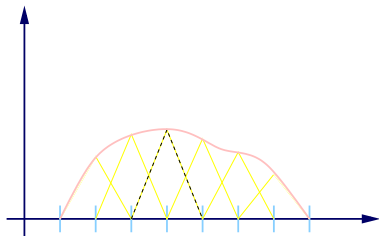
$$\|v\|_0 = \left( \int_a^b v^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|v\|_V = (\|v\|_0^2 + \|v'\|_0^2)^{1/2}, \quad \forall v \in V$$

vale la seguente maggiorazione

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

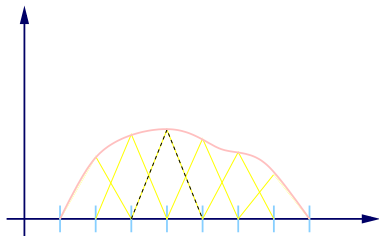
L'errore è maggiorato dalla migliore approssimazione.  
Occorre una buona scelta di  $V_h$ !

# Elementi finiti



Approssimazione in 1D con polinomi lineari a tratti.  
Funzioni di base (shape functions): funzioni a tetto.

# Elementi finiti

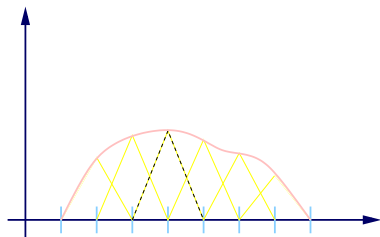


Approssimazione in 1D con polinomi lineari a tratti.  
Funzioni di base (shape functions): funzioni a tetto.

Un elemento finito è definito da:

1) un dominio (intervallo, triangolo, tetraedro, ...),

# Elementi finiti

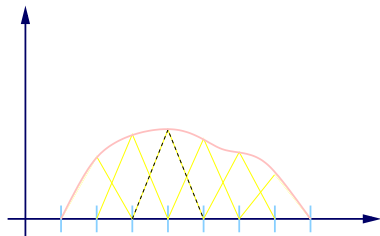


Approssimazione in 1D con polinomi lineari a tratti.  
Funzioni di base (shape functions): funzioni a tetto.

Un elemento finito è definito da:

- 1) un dominio (intervallo, triangolo, tetraedro, ...),
- 2) uno spazio di dimensione finita (polinomiale),

# Elementi finiti



Approssimazione in 1D con polinomi lineari a tratti.  
Funzioni di base (shape functions): funzioni a tetto.

Un elemento finito è definito da:

- 1) un dominio (intervallo, triangolo, tetraedro, ...),
- 2) uno spazio di dimensione finita (polinomiale),
- 3) un insieme di gradi di libertà **d.o.f (degrees of freedom)**.

# Elementi finiti in 1D

1) dominio: intervallo

# Elementi finiti in 1D

- 1) dominio: intervallo
- 2) spazio:  $\mathbb{P}_r$

## Elementi finiti in 1D

- 1) dominio: intervallo
- 2) spazio:  $\mathbb{P}_r$
- 3) d.o.f.: dipendono dal grado dei polinomi



## Elementi finiti in 1D

- 1) dominio: intervallo
  - 2) spazio:  $\mathbb{P}_r$
  - 3) d.o.f.: dipendono dal grado dei polinomi
- elementi lineari: estremi (2)
- elementi quadratici: estremi + punto medio (3)
- ...

## Elementi finiti in 1D

- 1) dominio: intervallo
  - 2) spazio:  $\mathbb{P}_r$
  - 3) d.o.f.: dipendono dal grado dei polinomi
- elementi lineari: estremi (2)  
 elementi quadratici: estremi + punto medio (3)  
 ...

### Proprietà di approssimazione

Sia  $I_h u(x) = \sum_{i=1}^{N_h} u(x_i) \varphi_i(x)$  l'interpolata lineare a tratti di  $u$  allora

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_0 \leq \|u - I_h u\|_0 \leq C_1 h^2 \|u''\|_0$$

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u' - v_h'\|_0 \leq \|u' - (I_h u)'\|_0 \leq C_2 h \|u''\|_0$$

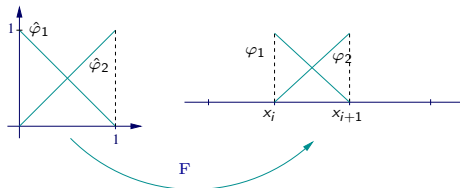
## Matrici di rigidezza e di massa

Le matrici di rigidezza  $K$  e di massa  $M$  hanno la seguente struttura:

$$K = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

## Elemento di riferimento ed elemento corrente



$\hat{K} = [0, 1]$   
 elemento di riferimento  
 $K = I_i = [x_{i-1}, x_i]$   
 elemento corrente

$\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$  funzioni di base su  $\hat{K}$ ;  
 $\varphi_1, \varphi_2$  funzioni di base su  $K$ .

$$F_K : \hat{K} \rightarrow K, \quad x = F_K(\hat{x})$$

$$\varphi(x) = \hat{\varphi}(F_K^{-1}(x))$$

Quindi

$$x = F_K(\hat{x}) = x_{i-1} + h\hat{x}.$$

## Calcolo del termine noto

Si ha

$$\underline{\mathbf{E}}_i = F(\varphi_i) = \int_{\Omega} f(x)\varphi_i(x)dx = \sum_K \int_K f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Passando all'elemento di riferimento si ha:

$$\begin{aligned} \int_K f(x)\varphi_i(x)dx &= \int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{x}))\hat{\varphi}_i(\hat{x})F'_K(\hat{x})d\hat{x} \\ &= h \int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{x}))\hat{\varphi}_i(\hat{x})d\hat{x} \end{aligned}$$

## Calcolo del termine noto

Si ha

$$\underline{F}_i = F(\varphi_i) = \int_{\Omega} f(x)\varphi_i(x)dx = \sum_K \int_K f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Passando all'elemento di riferimento si ha:

$$\begin{aligned} \int_K f(x)\varphi_i(x)dx &= \int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{x}))\hat{\varphi}_i(\hat{x})F'_K(\hat{x})d\hat{x} \\ &= h \int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{x}))\hat{\varphi}_i(\hat{x})d\hat{x} \end{aligned}$$

Per il calcolo di questo integrale occorrono delle **formule di quadratura** appropriate in modo che l'errore introdotto nell'uso delle formule di quadratura sia di *ordine superiore* rispetto all'errore di discretizzazione. Ad esempio, si possono usare le **formule di Gauss-Legendre**.

## Formule di Gauss - Legendre

Nella tabella qui sotto,  $n$  indica il grado dei polinomi interpolanti. I nodi  $\tilde{x}_i$  e i pesi  $\tilde{w}_i$  sono relativi all'intervallo  $[-1, 1]$ .

| $n$ | nodii $\tilde{x}_i$ $i = 0, \dots, n$ | pesi $\tilde{w}_i$ $i = 0, \dots, n$ |
|-----|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 0   | (0)                                   | (2)                                  |
| 1   | $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$           | (1, 1)                               |
| 2   | $(-\sqrt{15}/5, 0, \sqrt{15}/5)$      | (5/9, 8/9, 5/9)                      |

| $n$ | G.d.P. | ordine                |
|-----|--------|-----------------------|
| 0   | 1      | $CH^2 \max  f^{(2)} $ |
| 1   | 3      | $CH^4 \max  f^{(4)} $ |
| 2   | 5      | $CH^6 \max  f^{(6)} $ |

I nodi  $\hat{x}_i$  e i pesi  $\hat{w}_i$  sull'intervallo  $[0, 1]$  si ottengono con le trasformazioni:

$$\hat{x}_i = \frac{1 + \tilde{x}_i}{2}, \quad \hat{w}_i = \tilde{w}_i.$$

# Assemblaggio del termine noto

Strategia generale:

- Ciclo sugli elementi  $ie = 1, \dots, ne$
- Calcolo del vettore termine noto locale  $F_i^{loc} = F(\varphi_i)$ ,  
 $i = 1, \dots, ndof$
- Ciclo sui gradi di libertà locali  $i = 1, \dots, ndof$  e assemblaggio del termine noto globale  $F_{iglob} = F_{iglob} + F_i^{loc}$
- Imposizione delle condizioni al bordo



## Condizioni di Dirichlet omogenee

Il vettore del termine noto con questa costruzione ha due elementi in più corrispondenti alle funzioni di base associate agli estremi dell'intervallo.

$$\underline{\mathbf{F}}_{prima} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Basta eliminare la prima e l'ultima componente:

$$\underline{\mathbf{F}}_{dopo} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

# Function per la soluzione con elementi finiti

```
[x,u]=femP1(mu,sigma,f,a,b,N)
```

## Input

|                        |                            |
|------------------------|----------------------------|
| <code>mu, sigma</code> | coefficienti               |
| <code>f</code>         | funzione al secondo membro |
| <code>a,b</code>       | estremi dell'intervallo    |
| <code>N</code>         | numero di punti interni    |

## Output

|                |                        |
|----------------|------------------------|
| <code>x</code> | punti della mesh       |
| <code>u</code> | valori della soluzione |

## Passi principali

- Funzioni di base sull'elemento di riferimento `shape.m`
- Costruzione della mesh
  - calcolare  $h$
  - costruire il vettore dei punti di suddivisione
- Costruzione della matrice e del termine noto
  - costruire le matrici  $K$ ,  $M$  in formato sparse
  - costruire il termine noto `carico.m`  
Ciclo sugli elementi
    - calcolare il termine noto locale
    - assemblare il termine noto globale
- Condizioni al bordo
- Soluzione del sistema lineare
- Output  $x, u$

## Errore

Conoscendo la soluzione esatta, la function **errore** fornisce le due quantità:

$$\|u - u_h\|_0 \quad \|u' - u'_h\|_0.$$

`[E0,E1]=errore(u,a,b,esatta,desatta,N)`

### Input

|                              |  |
|------------------------------|--|
| <code>u</code>               | vettore soluzione  |
| <code>a,b</code>             | estremi dell'intervallo  |
| <code>esatta, desatta</code> | espressioni analitiche della soluzione esatta e della sua derivata |
| <code>N+1</code>             | numero degli intervalli  |

### Output

|                 |                                 |
|-----------------|---------------------------------|
| <code>E0</code> | errore in $L^2$ della soluzione |
| <code>E1</code> | errore in $L^2$ della derivata  |

## Esercizio 1

Si consideri l'equazione differenziale

$$-u'' = f \quad x \in (0, 1) \quad u(0) = u(1) = 0$$

essendo  $f$  una delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2 & f_2(x) &= -12x^2 + 12x - 2 \\ f_3(x) &= 4\pi^2 \sin(2\pi x) & f_4(x) &= e^x(1 + x) \end{aligned}$$

Risolvere l'equazione differenziale con elementi finiti lineari usando la function `femP1` al variare di  $N=[10 \ 20 \ 40 \ 80 \ 160 \ 320]$ .

Calcolare l'errore relativo in norma  $L^2$  sia della funzione che della derivata usando la function `errore`. Calcolare inoltre l'errore relativo in norma euclidea di  $\mathbb{R}^{N+1}$  del vettore soluzione rispetto ai valori della soluzione esatta nei nodi.

Riportare opportunamente i risultati in scala bilogarithmica.

# Soluzioni dell'esercizio 1

La soluzione esatta dell'equazione differenziale dell'esercizio 1 ha la seguente espressione analitica:

$$u_1(x) = x(1 - x)$$

$$u_2(x) = x^2(1 - x)^2$$

$$u_3(x) = \sin(2\pi x)$$

$$u_4(x) = (e^x - 1)(1 - x)$$

## Esercizio 2

Si consideri l'equazione differenziale

$$-u'' + u = f \quad x \in (0, 1) \quad u(0) = u(1) = 0$$

essendo  $f$  calcolata in maniera opportuna in modo che la soluzione esatta sia la stessa dell'esercizio 1. Risolvere l'equazione differenziale con elementi finiti lineari usando la function `femP1` al variare di  $N=[10 \ 20 \ 40 \ 80 \ 160 \ 320]$ .

Calcolare l'errore relativo in norma  $L^2$  sia della funzione che della derivata usando la function `errore`. Calcolare inoltre l'errore relativo in norma euclidea di  $\mathbb{R}^{N+1}$  del vettore soluzione rispetto ai valori della soluzione esatta nei nodi.

Riportare opportunamente i risultati in scala bilogarithmica.

## Esercizio 3

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$-u''(x) = f(x) \quad x \in (-1, 1), \quad u(-1) = u(1) = 0$$

essendo  $f(x) = q(q-1)|x|^{q-2}$ .

La soluzione esatta è:  $u(x) = 1 - |x|^q$ .

Per ciascuno dei seguenti valori  $q = 4, 3, 2, 5/3, 3/2, 5/4$ .

- Plottare la soluzione insieme alla soluzione esatta.
- Plottare gli errori in norma  $L^2$  sia della funzione che della derivata e determinare l'ordine di convergenza.
- Confrontare i risultati ottenuti con quelli forniti dal metodo delle differenze finite.



## Perturbazione singolare

$$-\varepsilon u'' + u = 1 \quad x \in [0, 1] \quad u(0) = u(1) = 0$$

Soluzione:

$$u = \frac{-\sinh\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sinh\left(\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} + 1$$

- Si consideri  $\varepsilon = 1e-1, 1e-3, 1e-5$  e si calcoli la soluzione per  $N = 10$  e la si confronti con la soluzione esatta.

## Perturbazione singolare

$$-\varepsilon u'' + u = 1 \quad x \in [0, 1] \quad u(0) = u(1) = 0$$

Soluzione:

$$u = \frac{-\sinh\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sinh\left(\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} + 1$$

- Si consideri  $\varepsilon = 1e-1, 1e-3, 1e-5$  e si calcoli la soluzione per  $N = 10$  e la si confronti con la soluzione esatta.
- Per  $\varepsilon = 1e-3, 1e-5$  si possono osservare oscillazioni indesiderate. Trovare il più piccolo  $N$  multiplo di 10 per cui le soluzioni numeriche non presentano oscillazioni nei due casi.

## Perturbazione singolare

$$-\varepsilon u'' + u = 1 \quad x \in [0, 1] \quad u(0) = u(1) = 0$$

Soluzione:

$$u = \frac{-\sinh\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sinh\left(\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} + 1$$

- Si consideri  $\varepsilon = 1e-1, 1e-3, 1e-5$  e si calcoli la soluzione per  $N = 10$  e la si confronti con la soluzione esatta.
- Per  $\varepsilon = 1e-3, 1e-5$  si possono osservare oscillazioni indesiderate. Trovare il più piccolo  $N$  multiplo di 10 per cui le soluzioni numeriche non presentano oscillazioni nei due casi.
- Gli elementi della matrice del sistema sono dati da:

$$A_{ii} = \frac{2\varepsilon}{h} + \frac{2h}{3}, \quad A_{i,i-1} = A_{i,i+1} = -\frac{\varepsilon}{h} + \frac{h}{6}$$

Verificare che le oscillazioni si verificano fintanto che  $A_{i,i-1} = A_{i,i+1} > 0$ .