# Autovalori ed autovettori di una matrice

Lucia Gastaldi

Dipartimento di Matematica,
http://lucia-gastaldi.unibs.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

# Indice

# Autovalori ed autovettori di una matrice

## Definizione

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice **autovalore della matrice** $A$, se esiste un vettore $x \in \mathbb{C}^n$ tale che $x \neq 0$ e

$$Ax = \lambda x.$$

Il vettore $x$ si chiama **autovettore della matrice** $A$ associato all'autovalore $\lambda$.

# Autovalori ed autovettori di una matrice

## Definizione

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice **autovalore della matrice** $A$, se esiste un vettore $x \in \mathbb{C}^n$ tale che $x \neq 0$ e

$$Ax = \lambda x.$$

Il vettore $x$ si chiama **autovettore della matrice** $A$ associato all'autovalore $\lambda$.

### Osservazione

Gli autovettori di una matrice **non** sono unici: se $x$ è un autovettore di $A$ associato a $\lambda$ anche $\alpha x$, con $\alpha \in \mathbb{C}$, è autovettore di $A$ associato a $\lambda$.

$$A(\alpha x) = \alpha A x = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x)$$

# Polinomio caratteristico

Da $Ax = \lambda x$, si ricava $(A - \lambda I)x = 0$, essendo $I$ la matrice identità. Affinché esista $x \neq 0$ che soddisfa questa relazione, la matrice $A - \lambda I$ deve essere singolare cioè

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

# Polinomio caratteristico

Da $Ax = \lambda x$, si ricava $(A - \lambda I)x = 0$, essendo $I$ la matrice identità. Affinché esista $x \neq 0$ che soddisfa questa relazione, la matrice $A - \lambda I$ deve essere singolare cioè

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

## Proposizione

Gli autovalori di una matrice sono tutte e sole le radici del **polinomio caratteristico** definito da

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

# Molteplicità di un autovettore

## Molteplicità di un autovalore

$\lambda$ si dice **autovalore semplice** di $A$ se $\lambda$ è una radice semplice del polinomio $p(\lambda)$.
$\lambda$ ha **molteplicità** $\nu$ se $\lambda$ è una radice di molteplicità $\nu$ di $p(\lambda)$.

Per il teorema dell'algebra esistono esattamente $n$ autovalori di una matrice di ordine $n$ se vengono contati tenendo conto della loro molteplicità.

# Molteplicità di un autovettore

## Molteplicità di un autovalore

$\lambda$ si dice **autovalore semplice** di $A$ se $\lambda$ è una radice semplice del polinomio $p(\lambda)$.
$\lambda$ ha **molteplicità** $\nu$ se $\lambda$ è una radice di molteplicità $\nu$ di $p(\lambda)$.

Per il teorema dell'algebra esistono esattamente $n$ autovalori di una matrice di ordine $n$ se vengono contati tenendo conto della loro molteplicità.

## Autospazio

Si definisce **autospazio** associato all'autovalore $\lambda$ lo spazio lineare

$$V(\lambda) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax - \lambda x = 0\}.$$

La dimensione di $V(\lambda)$ è minore o uguale alla molteplicità $\nu$ di $\lambda$.

# Diagonalizzazione di una matrice

## Matrici simili

Date due matrici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Se esiste una matrice non singolare $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che

$$B = X^{-1}AX$$

allora le matrici $A$ e $B$ si dicono **simili**.

Due matrici simili hanno gli stessi autovalori e lo stesso polinomio caratteristico, infatti:

$$B(X^{-1}x) = (X^{-1}AX)(X^{-1}x) = X^{-1}Ax = X^{-1}(\lambda x) = \lambda X^{-1}x.$$

# Diagonalizzazione di una matrice

## Matrici simili

Date due matrici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Se esiste una matrice non singolare $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che

$$B = X^{-1}AX$$

allora le matrici $A$ e $B$ si dicono **simili**.

Due matrici simili hanno gli stessi autovalori e lo stesso polinomio caratteristico, infatti:

$$B(X^{-1}x) = (X^{-1}AX)(X^{-1}x) = X^{-1}Ax = X^{-1}(\lambda x) = \lambda X^{-1}x.$$

## Diagonalizzazione di $A$

La matrice $A$ si dice **diagonalizzabile** se esistono una matrice invertibile $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e una matrice diagonale $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tali che

$$\Lambda = X^{-1}AX.$$

# Diagonalizzazione di una matrice

Se $A$ è diagonalizzabile allora gli autovettori sono linearmente indipendenti. Infatti si ha

$$\Lambda = X^{-1}AX \quad \Rightarrow \quad AX = X\Lambda.$$

Le colonne di $X$ danno gli autovettori della matrice $A$; siccome $X$ è non singolare le sue colonne sono linearmente indipendenti.

# Matrici hermitiane

## Matrici hermitiane

La matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice **hermitiana** se $A = A^H$ essendo $A^H$ la matrice di elementi:

$$a_{ij}^H = \overline{a_{ji}}$$

($\overline{a}$ è il complesso coniugato di $a$).

**Osservazione** Se $A$ è una matrice ad elementi reali allora $A^H = A^T$.

# Matrici hermitiane

## Matrici hermitiane

La matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice **hermitiana** se $A = A^H$ essendo $A^H$ la matrice di elementi:

$$a_{ij}^H = \overline{a_{ji}}$$

($\bar{a}$ è il complesso coniugato di $a$).

**Osservazione** Se $A$ è una matrice ad elementi reali allora $A^H = A^T$.

## Teorema

- Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice hermitiana, allora i suoi autovalori sono reali.
- Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice hermitiana, allora i suoi autovettori sono a due a due ortogonali.

# Condizionamento degli autovalori

## Teorema di Bauer-Fike

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice diagonalizzabile, cioè esistono $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ non singolare e $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonale tali che $\Lambda = X^{-1}AX$.
Se $\mu$ è un autovalore della matrice $A + E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ allora

$$\min_{\lambda} |\lambda - \mu| \leq K_p(X) \|E\|_p$$

essendo $K_p(X)$ il numero di condizionamento di $X$ nella norma $\| \cdot \|_p$.

# Localizzazione degli autovalori

## Teorema di Gershgorin

Data la matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, costruiamo i seguenti cerchi del piano complesso:

$$R_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|\} \quad i = 1, \ldots, n$$

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ji}|\} \quad i = 1, \ldots, n$$

Allora gli autovalori della matrice $A$ sono contenuti sia nell'unione dei dischi $R_i$ che dei dischi $C_i$ , ossia

$$\lambda \in (\cup_{i=1}^{n} R_i) \cap (\cup_{i=1}^{n} C_i) .$$

Inoltre, se $p$ dischi $R_i$ sono disgiunti dai rimanenti, si ha che esattamente $p$ autovalori di $A$ cadono nell'unione di questi dischi.

# Localizzazione degli autovalori

La function `gershgorin.m` disegna i cerchi di Gershgorin di una assegnata matrice $A$. Si deve usare il seguente comando

```
gershgorin(A)
```

In blu sono disegnati i cerchi $R_i$ costruiti per righe;
in rosso sono disegnati i cerchi $C_i$ costruiti per colonne.

# Metodo delle potenze

## Metodo delle potenze

Data una matrice diagonalizzabile $A$ con autovalori che soddisfano:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Il metodo delle potenze permette di calcolare l'autovettore associato all'autovalore di modulo massimo.
Usando il rapporto di Rayleigh si ottiene anche un'approssimazione dell'autovalore di modulo massimo.

# Metodo delle potenze

## Metodo delle potenze

Data una matrice diagonalizzabile $A$ con autovalori che soddisfano:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Il metodo delle potenze permette di calcolare l'autovettore associato all'autovalore di modulo massimo.
Usando il rapporto di Rayleigh si ottiene anche un'approssimazione dell'autovalore di modulo massimo.

**Algoritmo delle potenze**

- Dati $A$, $x_0$, $y_0 = x_0/\|x_0\|$;
- per $k = 1, 2, \ldots$ fino a convergenza
  - calcola $x_k = Ay_{k-1}$;
  - normalizza $y_k = x_k/\|x_k\|$;
  - valuta l'autovalore $\lambda_k = y_k^H A y_k$.

Test d'arresto

- differenza fra le ultime iterate: $|\lambda_k - \lambda_{k-1}| \leq tol|\lambda_k|$.

# Metodo delle potenze inverse

Il metodo delle potenze inverse permette di calcolare l'autovettore associato all'autovalore di modulo minimo (purché diverso da zero) della matrice $A$.
Basta applicare il metodo delle potenze alla matrice $A^{-1}$.

# Metodo delle potenze inverse

Il metodo delle potenze inverse permette di calcolare l'autovettore associato all'autovalore di modulo minimo (purché diverso da zero) della matrice $A$.
Basta applicare il metodo delle potenze alla matrice $A^{-1}$.

**Algoritmo delle potenze inverse**

- Dati $A$, $x_0$, $y_0 = x_0/\|x_0\|$;
- calcola la fattorizzazione di $PA = LU$
- per $k = 1, 2, \ldots$ fino a convergenza
  - risolve $Ax_k = y_{k-1}$ usando la fattorizzazione di $A$;
  - normalizza $y_k = x_k/\|x_k\|$;
  - valuta $\mu_k = y_k^H A^{-1} y_k$.

  l'autovalore è dato da $\lambda_k = 1/\mu_k$

# Metodo delle potenze inverse con shift

Per calcolare l'autovettore associato all'autovalore più vicino ad un certo valore $\mu$ si applica uno **shift** alla matrice $A$ come segue:

$$(A - \mu I)x = (\lambda - \mu)x.$$

L'autovalore più vicino a $\mu$ è quindi tale che $|\lambda - \mu|$ sia minimo, quindi si applica il metodo delle potenze inverse alla matrice $A - \mu I$.

# Metodo delle potenze inverse con shift

Per calcolare l'autovettore associato all'autovalore più vicino ad un certo valore $\mu$ si applica uno **shift** alla matrice $A$ come segue:

$$(A - \mu I)x = (\lambda - \mu)x.$$

L'autovalore più vicino a $\mu$ è quindi tale che $|\lambda - \mu|$ sia minimo, quindi si applica il metodo delle potenze inverse alla matrice $A - \mu I$.

**Algoritmo delle potenze inverse con shift**

- Dati $A$, $\mu$, $x_0$, $y_0 = x_0/\|x_0\|$;
- calcola la fattorizzazione di $P(A - \mu I) = LU$
- per $k = 1, 2, \ldots$ fino a convergenza
  - risolve $(A - \mu I)x_k = y_{k-1}$ usando la fattorizzazione di $A - \mu I$;
  - normalizza $y_k = x_k/\|x_k\|$;
  - valuta $\eta_k = y_k^H (A - \mu I)^{-1} y_k$.

  l'autovalore è dato da $\lambda_k = \mu + 1/\eta_k$

# Metodo delle potenze per sottospazi

Si può generalizzare il metodo delle potenze in modo di calcolare autospazi di dimensione arbitraria $p$.

# Metodo delle potenze per sottospazi

Si può generalizzare il metodo delle potenze in modo di calcolare autospazi di dimensione arbitraria p.

**Algoritmo delle potenze per sottospazi**

- Dati $A$, $\mu$, $Q_0 \in \mathbb{C}^{n \times p}$ tale che $Q^H Q = I_p$;
- per $k = 1, 2, \dots$ fino a convergenza
    - $Z_k = AQ_{k-1}$ prodotto per $A$;
    - $Q_k R_k = Z_k$ fattorizzazione QR.

# Function di Matlab per il calcolo di autovalori ed autovettori

## eig

La function `eig` calcola tutti gli autovalori e gli autovettori della matrice $A$ mediante il metodo QR.

# Function di Matlab per il calcolo di autovalori ed autovettori

## eig

La function `eig` calcola tutti gli autovalori e gli autovettori della matrice $A$ mediante il metodo QR.

- `e=eig(A)` fornisce un vettore contenente gli autovalori di $A$.
- `[V,D]=eig(A)` fornisce la matrice diagonale `D`, contenente gli autovalori sulla diagonale, e la matrice `V`, contenente gli autovettori (colonna per colonna) tali che $A * V = V * D$.

# Function di Matlab per il calcolo di autovalori ed autovettori

## eigs

La function `eigs` calcola gli autovalori di modulo più grande e gli autovettori associati di una matrice in formato sparse applicando il metodo di Arnoldi.

# Function di Matlab per il calcolo di autovalori ed autovettori

## eigs

La function `eigs` calcola gli autovalori di modulo più grande e gli autovettori associati di una matrice in formato sparse applicando il metodo di Arnoldi.

- `e=eigs(A)` calcola i sei autovalori più grandi in modulo.
- `[V,D]=eigs(A)` calcola la matrice diagonale $D$ contenente i sei autovalori più grandi in modulo e la matrice $V$ le cui colonne sono i corrispondenti autovettori.
- `eisg(A,k)` calcola i k autovalori di $A$ più grandi in modulo.
- `eigs(A,k,sigma)` calcola k autovalori con i seguenti criteri:

| | |
|---|---|
| `sigma` scalare | k autovalori più vicini a `sigma` |
| `sigma`='lm' | k autovalori più grandi |
| `sigma`='sm' | k autovalori più piccoli |
| `sigma`='be' | k autovalori più grandi e più piccoli |

# Esercizi

## Esercizio 1

Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1-7i & 2 & 1 & 0 \\ -2 & i & 0 & 1-i \\ 3+2i & 1 & 2 & 4i \\ 0 & 0 & i & -7 \end{pmatrix}$$

- Usare la function `gershgorin` per localizzare gli autovalori delle due matrici.
- Calcolare autovalori ed autovettori delle due matrici mediante la function `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin.
- Usare il metodo delle potenze `potenze` e delle potenze inverse con shift `shiftinv` per calcolare gli autovalori di modulo massimo, minimo e quelli più vicini ai centri dei cerchi di Gershgorin.

# La function potenze

## potenze.m

```
[lambda,x,iter]=potenze(A,x0,toll,nmax)
```

| | |
|---|---|
| `lambda` | autovalore calcolato; |
| `x` | autovettore calcolato; |
| `iter` | numero di iterazioni per arrivare a convergenza; |
| `A` | matrice; |
| `x0` | vettore iniziale; |
| `toll` | tolleranza; |
| `nmax` | numero massimo di iterazioni |

# Le function `shiftinv`

## shiftinv.m

```
[lambda,x,iter]=shiftinv(A,mu,x0,toll,nmax)
```

| | |
|---|---|
| `lambda` | autovalore calcolato; |
| `x` | autovettore calcolato; |
| `iter` | numero di iterazioni per arrivare a convergenza; |
| `A` | matrice; |
| `mu` | shift; |
| `x0` | vettore iniziale; |
| `toll` | tolleranza; |
| `nmax` | numero massimo di iterazioni |

# Esercizio

## Esercizio 2

Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Usare la function `gershgorin` per localizzare gli autovalori.
- Calcolare gli autovalori con la function `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin.
- Usare la function `potenze` per calcolare l'autovalore di modulo massimo.
- Usare la function `shiftinv` con shift $\mu = 0$ per calcolare l'autovalore di modulo minimo.
- Osservato che `shiftinv` con shift $\mu = 0$ non converge e che gli autovalori di modulo minimo sono complessi coniugati, trovare degli shift che permettano di calcolarli.

# Esercizio

## Esercizio 3

Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & 10 & 12 \\ 6 & -6 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

- Calcolare gli autovalori e gli autovettori usando il comando `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin;
- calcolare l'autovalore di modulo massimo e l'autovettore associato mediante la function `potenze`, usando come vettore iniziale
  `x0=[0 1 0 0]'` e `x0=[0 0 1 -1]'`;
- verificare che uno dei due vettori iniziali risulta ortogonale all'autovettore calcolato (usare `toll=eps`).

# Esercizio

## Esercizio 4

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3.5 + i/3 & -2.5 + i/3 & -2.5 + i & 4 \\ 1.5 + i/6 & 1.5 + i/6 & -3.5 + i/2 & 2 \\ i/6 & -2 + i/6 & 3 + i/2 & 2 \\ -0.5 + i/3 & 2.5 - 2i/3 & -1.5 & -1 + i \end{pmatrix}$$

- Calcolare gli autovalori e gli autovettori usando il comando `eig` e marcare gli autovalori sul grafico contenente i cerchi di Gershgorin;
- calcolare l'autovalore di modulo massimo e l'autovettore associato mediante la function `potenze`, usando come vettore iniziale `x0=[0 1 0 1]'` e `x0=[0 0 1 1]'` e tolleranza pari alla precisione di macchina `eps`;
- verificare che uno dei due vettori iniziali risulta ortogonale all'autovettore calcolato.

# Esercizio sull'uso di `eigs`

Costruire usando la function `Laplace` la matrice dei coefficienti associata al seguente problema differenziale agli autovalori:

$$
\begin{aligned}
-u_{xx} - u_{yy} = \lambda u \quad & \text{in } [0,\pi]\times[0,\pi] \\
u = 0 \quad & \text{sul bordo del quadrato.}
\end{aligned}
$$

Usando il comando `eigs` calcolare i 10 autovalori più piccoli e gli autovettori associati.
Verificare che gli autovettori sono le approssimazioni dei numeri $n^2 + m^2$ per $n$ e $m$ interi e positivi.
Plottare con il comando `graf_lapl` i corrispondenti autovettori. Si osserva che gli autovettori forniscono un'approssimazione delle funzioni $u(x,y) = \sin(nx)sin(my)$.