Metodo degli elementi finiti in una dimensione

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,
http://lucia-gastaldi.unibs.it

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BRESCIA

Indice

Problema di Dirichlet

Problema in una dimensione

Sia

- $\Omega =]a, b[$,
- $\mu \in \mathbb{R}$, con $\mu > 0$
- $\sigma \in \mathbb{R}$ tale che $\sigma \geq 0$

Trovare $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{array}{l} -(\mu u'(x))' + \sigma u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in \Omega \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{array}$$

Teorema

Il problema è ben posto nel senso che **esiste una ed una sola soluzione** che dipende con continuità dai dati (stabilità).

Problema con condizioni di Dirichlet omogenee

Problema

$$\begin{array}{ll} -\mu u'' + \sigma u = f & \text{in } \Omega =]a, b[\\ u(a) = u(b) = 0 & \end{array}$$

Quadro funzionale

Posto

$$\mathbf{L}^2(a,b) = \{v : (a,b) \to \mathbb{R} : \int_a^b v^2\, dx < +\infty\}$$

si definisce

$$H^1(a,b) = \{v \in \mathbf{L}^2(a,b) : v' \in \mathbf{L}^2(a,b)\}$$
$$V = H^1_0(a,b) = \{v \in H^1(a,b) : v(a) = v(b) = 0\}$$

Moltiplichiamo l'equazione per $v \in V$ (test function) e integriamo su (a, b):

$$\int_a^b (-\mu u''(x) + \sigma u(x))v(x)\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx$$

Integrando per parti il primo termine si ha

$$\int_a^b \mu u''(x)v(x)\,dx = \left[\mu u'(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b \mu u'(x)v'(x)\,dx$$

da cui

$$\int_a^b (\mu u'(x)v'(x) + \sigma u(x)v(x))\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx$$

Moltiplichiamo l'equazione per $v \in V$ (test function) e integriamo su (a, b):

$$\int_a^b (-\mu u''(x) + \sigma u(x))v(x)\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx$$

Integrando per parti il primo termine si ha

$$\int_a^b \mu u''(x)v(x)\,dx = \left[\mu u'(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b \mu u'(x)v'(x)\,dx$$

da cui

$$\int_a^b (\mu u'(x)v'(x) + \sigma u(x)v(x))\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx$$

Problema

Trovare $u \in V$ tale che

$$\int_a^b (\mu u'(x)v'(x) + \sigma u(x)v(x))\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in V.$$

Metodo di Galerkin

Consideriamo uno spazio di dimensione finita $V_h \subseteq V$ (h è il parametro di finezza della mesh)

Problema discreto

Trovare $u_h \in V_h$ tale che

$$\int_a^b (\mu u_h'(x) v_h'(x) + \sigma u_h(x) v_h(x))\, dx = \int_a^b f(x) v_h(x)\, dx \quad \forall v_h \in V_h.$$

Supponiamo che $V_h = \mathrm{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{N_h}\}$, quindi $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j$.

Il problema si riscrive: trovare $\underline{\mathbf{u}} = \{u_j\}$ tale che per ogni i

$$\int_a^b \left(\mu \Big(\sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j' \Big) \varphi_i' + \sigma \Big(\sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j \Big) \varphi_i \right) dx = \int_a^b f \varphi_i \, dx.$$

Per la linearità degli integrali si ottiene

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j \left(\int_a^b \mu \varphi_j' \varphi_i' + \sigma \varphi_j \varphi_i \, dx \right) = \int_a^b f \varphi_i \, dx \quad i = 1, \ldots, N_h.$$

Indichiamo con K la matrice di *rigidezza* o *stiffness* e con M la matrice di *massa*, rispettivamente di elementi

$$K_{ij} = \int_a^b \varphi_j' \varphi_i' \, dx \qquad M_{ij} = \int_a^b \varphi_j \varphi_i \, dx,$$

con $\underline{\mathbf{F}}$ il vettore di *carico* con componenti

$$\underline{\mathbf{F}}_i = \int_a^b f \varphi_i \, dx.$$

Posto $A = \mu K + \sigma M$, il problema discreto è equivalente al seguente **sistema lineare**

$$A \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{F}}$$

essendo A simmetrica e definita positiva.

Stime dell'errore

Lemma

Posto

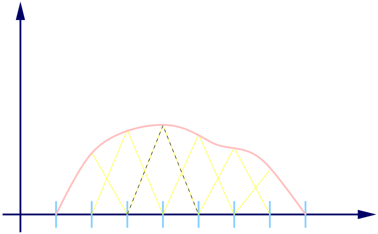
$$\|v\|_0 = \left(\int_a^b v^2\,dx\right)^{1/2}, \quad \|v\|_V = \left(\|v\|_0^2 + \|v'\|_0^2\right)^{1/2}, \ \forall v \in V$$

vale la seguente maggiorazione

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

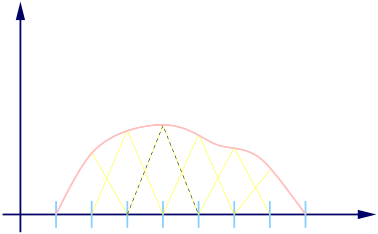
L'errore è maggiorato dalla migliore approssimazione.
Occorre una buona scelta di V_h!

Elementi finiti



Approssimazione in 1D con polinomi lineari a tratti.
Funzioni di base
(shape functions): funzioni a tetto.

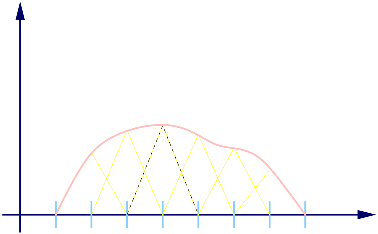
Elementi finiti



Approssimazione in 1D con polinomi lineari a tratti.
Funzioni di base
(shape functions): funzioni a tetto.

Un elemento finito è definito da:
1) un dominio (intervallo, triangolo, tetraedro,. . .),

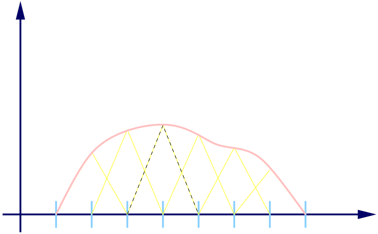
Elementi finiti



Approssimazione in 1D con polinomi lineari a tratti.
Funzioni di base (shape functions): funzioni a tetto.

Un elemento finito è definito da:
1) un dominio (intervallo, triangolo, tetraedro,. . .),
2) uno spazio di dimensione finita (polinomiale),

Elementi finiti



Approssimazione in 1D con polinomi lineari a tratti.
Funzioni di base
(shape functions): funzioni a tetto.

Un elemento finito è definito da:
1) un dominio (intervallo, triangolo, tetraedro,. . .),
2) uno spazio di dimensione finita (polinomiale),
3) un insieme di gradi di libertà d.o.f (degrees of freedom).

Elementi finiti in 1D

1) dominio: intervallo

Elementi finiti in 1D

1) dominio: intervallo
2) spazio: $\mathbb{P}_r$

Elementi finiti in 1D

1) dominio: intervallo
2) spazio: $\mathbb{P}_r$
3) d.o.f.: dipendono dal grado dei polinomi

Elementi finiti in 1D

1) dominio: intervallo
2) spazio: $\mathbb{P}_r$
3) d.o.f.: dipendono dal grado dei polinomi
elementi lineari: estremi (2)
elementi quadratici: estremi + punto medio (3)
...

Elementi finiti in 1D

1) dominio: intervallo
2) spazio: $\mathbb{P}_r$
3) d.o.f.: dipendono dal grado dei polinomi
elementi lineari: estremi (2)
elementi quadratici: estremi + punto medio (3)
...

Proprietà di approssimazione

Sia $I_h u(x) = \sum_{i=1}^{N_h} u(x_i)\varphi_i(x)$ l'interpolata lineare a tratti di u allora

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_0 \leq \|u - I_h u\|_0 \leq C_1 h^2 \|u''\|_0$$

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u' - v_h'\|_0 \leq \|u' - (I_h u)'\|_0 \leq C_2 h \|u''\|_0$$

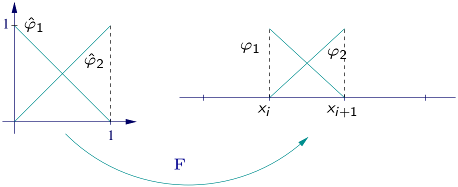
Matrici di rigidezza e di massa

Le matrici di rigidezza K e di massa M hanno la seguente struttura:

$$K = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Elemento di riferimento ed elemento corrente



$\hat{K} = [0, 1]$
elemento di riferimento
$K = I_i = [x_{i-1}, x_i]$
elemento corrente

$\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$ funzioni di base su $\hat{K}$;
φ_1, φ_2 funzioni di base su K.

$$F_K : \hat{K} \to K, \quad x = F_K(\hat{x})$$
$$\varphi(x) = \hat{\varphi}(F_K^{-1}(x))$$

Quindi

$$x = F_K(\hat{x}) = x_{i-1} + h\hat{x}.$$

Calcolo del termine noto

Si ha

$$\underline{\mathbf{F}}_i = F(\varphi_i) = \int_\Omega f(x)\varphi_i(x)dx = \sum_K \int_K f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Passando all'elemento di riferimento si ha:

$$\begin{aligned}\int_K f(x)\varphi_i(x)dx &= \int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{x}))\hat{\varphi}_i(\hat{x})F_K'(\hat{x})\,d\hat{x}\\ &= h\int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{x}))\hat{\varphi}_i(\hat{x})\,d\hat{x}\end{aligned}$$

Calcolo del termine noto

Si ha

$$\underline{\mathbf{F}}_i = F(\varphi_i) = \int_\Omega f(x)\varphi_i(x)dx = \sum_K \int_K f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Passando all'elemento di riferimento si ha:

$$\begin{aligned}\int_K f(x)\varphi_i(x)dx &= \int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{x}))\hat{\varphi}_i(\hat{x})F_K'(\hat{x})\,d\hat{x}\\ &= h\int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{x}))\hat{\varphi}_i(\hat{x})\,d\hat{x}\end{aligned}$$

Per il calcolo di questo integrale occorrono delle formule di quadratura appropriate in modo che l'errore introdotto nell'uso delle formule di quadratura sia di *ordine superiore* rispetto all'errore di discretizzazione. Ad esempio, si possono usare le formule di Gauss-Legendre.

Formule di Gauss - Legendre

Nella tabella qui sotto, n indica il grado dei polinomi interpolanti. I nodi $\tilde{x}_i$ e i pesi $\tilde{w}_i$ sono relativi all'intervallo $[-1, 1]$.

n	nodi $\tilde{x}_i$ $i = 0, \ldots, n$	pesi $\tilde{w}_i$ $i = 0, \ldots, n$
0	(0)	(2)
1	$(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	$(1, 1)$
2	$(-\sqrt{15}/5, 0, \sqrt{15}/5)$	$(5/9, 8/9, 5/9)$

n	G.d.P.	ordine
0	1	$CH^2 \max \lvert f^{(2)} \rvert$
1	3	$CH^4 \max \lvert f^{(4)} \rvert$
2	5	$CH^6 \max \lvert f^{(6)} \rvert$

I nodi $\hat{x}_i$ e i pesi $\hat{w}_i$ sull'intervallo $[0, 1]$ si ottengono con le trasformazioni:

$$\hat{x}_i = \frac{1 + \tilde{x}_i}{2}, \quad \hat{w}_i = \tilde{w}_i.$$

Assemblaggio del termine noto

Strategia generale:

- Ciclo sugli elementi $ie = 1, \dots, ne$
- Calcolo del vettore termine noto locale $F_i^{loc} = F(\varphi_i)$, $i = 1, \dots, ndof$
- Ciclo sui gradi di libertà locali $i = 1, \dots, ndof$ e assemblaggio del termine noto globale $F_{iglob} = F_{iglob} + F_i^{loc}$
- Imposizione delle condizioni al bordo

Condizioni di Dirichlet omogenee

Il vettore del termine noto con questa costruzione ha due elementi in più corrispondenti alle funzioni di base associate agli estremi dell'intervallo.

$$\underline{\mathbf{F}}_{prima} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Basta eliminare la prima e l'ultima componente:

$$\underline{\mathbf{F}}_{dopo} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

Function per la soluzione con elementi finiti

```
[x,u]=femP1(mu,sigma,f,a,b,N)
```

Input

`mu, sigma`	coefficienti
`f`	funzione al secondo membro
`a,b`	estremi dell'intervallo
`N`	numero di punti interni

Output

`x`	punti della mesh
`u`	valori della soluzione

Passi principali

- Funzioni di base sull'elemento di riferimento `shape.m`
- Costruzione della mesh
  - calcolare h
  - costruire il vettore dei punti di suddivisione
- Costruzione della matrice e del termine noto
  - costruire le matrici `K, M` in formato sparse
  - costruire il termine noto `carico.m`
    Ciclo sugli elementi
    - calcolare il termine noto locale
    - assemblare il termine noto globale
- Condizioni al bordo
- Soluzione del sistema lineare
- Output `x,u`

Errore

Conoscendo la soluzione esatta, la function `errore` fornisce le due quantità:

$$\|u - u_h\|_0 \qquad \|u' - u'_h\|_0.$$

```
[E0,E1]=errore(u,a,b,esatta,desatta,N)
```

Input

`u`	vettore soluzione
`a,b`	estremi dell'intervallo
`esatta, desatta`	espressioni analitiche della soluzione esatta e della sua derivata
`N+1`	numero degli intervalli

Output

`E0`	errore in L^2 della soluzione
`E1`	errore in L^2 della derivata

Esercizio 1

Si consideri l'equazione differenziale

$$-u'' = f \quad x \in (0,1) \qquad u(0) = u(1) = 0$$

essendo f una delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = 2 & f_2(x) = -12x^2 + 12x - 2 \\ f_3(x) = 4\pi^2 \sin(2\pi x) & f_4(x) = e^x(1+x) \end{array}$$

Risolvere l'equazione differenziale con elementi finiti lineari usando la function `femP1` al variare di `N=[10 20 40 80 160 320]`.
Calcolare l'errore relativo in norma L^2 sia della funzione che della derivata usando la function `errore`. Calcolare inoltre l'errore relativo in norma euclidea di $\mathbb{R}^{N+1}$ del vettore soluzione rispetto ai valori della soluzione esatta nei nodi.
Riportare opportunamente i risultati in scala bilogaritmica.

Soluzioni dell'esercizio 1

La soluzione esatta dell'equazione differenziale dell'esercizio 1 ha la seguente espressione analitica:

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= x(1-x) \\
u_2(x) &= x^2(1-x)^2 \\
u_3(x) &= \sin(2\pi x) \\
u_4(x) &= (e^x - 1)(1-x)
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

Si consideri l'equazione differenziale

$$-u'' + u = f \quad x \in (0,1) \qquad u(0) = u(1) = 0$$

essendo f calcolata in maniera opportuna in modo che la soluzione esatta sia la stessa dell'esercizio 1. Risolvere l'equazione differenziale con elementi finiti lineari usando la function `femP1` al variare di `N=[10 20 40 80 160 320]`.

Calcolare l'errore relativo in norma L^2 sia della funzione che della derivata usando la function `errore`. Calcolare inoltre l'errore relativo in norma euclidea di $\mathbb{R}^{N+1}$ del vettore soluzione rispetto ai valori della soluzione esatta nei nodi.

Riportare opportunamente i risultati in scala bilogaritmica.

Esercizio 3

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$-u''(x) = f(x) \quad x \in (-1, 1), \qquad u(-1) = u(1) = 0$$

essendo $f(x) = q(q-1)|x|^{q-2}$.
La soluzione esatta è: $u(x) = 1 - |x|^q$.
Per ciascuno dei seguenti valori $q = 4, 3, 2, 5/3, 3/2, 5/4$.

- Plottare la soluzione insieme alla soluzione esatta.
- Plottare gli errori in norma L^2 sia della funzione che della derivata e determinare l'ordine di convergenza.
- Confrontare i risultati ottenuti con quelli forniti dal metodo delle differenze finite.

Perturbazione singolare

$$-\varepsilon u'' + u = 1 \quad x \in [0,1] \qquad u(0) = u(1) = 0$$

Soluzione:

$$u = \frac{-\sinh\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sinh\left(\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} + 1$$

- Si consideri $\varepsilon =$1e-1,1e-3,1e-5 e si calcoli la soluzione per $N = 10$ e la si confronti con la soluzione esatta.

Perturbazione singolare

$$-\varepsilon u'' + u = 1 \quad x \in [0,1] \qquad u(0) = u(1) = 0$$

Soluzione:

$$u = \frac{-\sinh\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sinh\left(\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} + 1$$

- Si consideri $\varepsilon =$1e-1,1e-3,1e-5 e si calcoli la soluzione per $N = 10$ e la si confronti con la soluzione esatta.
- Per $\varepsilon =$1e-3,1e-5 si possono osservare oscillazioni indesiderate. Trovare il più piccolo N multiplo di 10 per cui le soluzioni numeriche non presentano oscillazioni nei due casi.

Perturbazione singolare

$$-\varepsilon u'' + u = 1 \quad x \in [0,1] \qquad u(0) = u(1) = 0$$

Soluzione:

$$u = \frac{-\sinh\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sinh\left(\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} + 1$$

- Si consideri $\varepsilon =$1e-1,1e-3,1e-5 e si calcoli la soluzione per $N = 10$ e la si confronti con la soluzione esatta.
- Per $\varepsilon =$1e-3,1e-5 si possono osservare oscillazioni indesiderate. Trovare il più piccolo N multiplo di 10 per cui le soluzioni numeriche non presentano oscillazioni nei due casi.
- Gli elementi della matrice del sistema sono dati da:

$$A_{ii} = \frac{2\varepsilon}{h} + \frac{2h}{3}, \quad A_{i\,i-1} = A_{i\,i+1} = -\frac{\varepsilon}{h} + \frac{h}{6}$$

  Verificare che le oscillazioni si verificano fintanto che $A_{i\,i-1} = A_{i\,i+1} > 0$.

Problema con condizioni di Dirichlet non omogenee

Problema

$$
\begin{aligned}
& -\mu u''(x) + \sigma u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in (a,b) \\
& u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta
\end{aligned}
$$

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$
V = H^1(a,b), \qquad V_0 = \{v \in V : v(a) = v(b) = 0\}
$$

Problema debole

Trovare $u \in V$ tale che $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$ e soddisfa

$$
\int_a^b \big(\mu u'(x)v'(x) + \sigma u(x)v(x)\big)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \forall v \in V_0.
$$

Discretizzazione con elementi finiti

Introduciamo lo spazio $V_h \subset V_0$ che contiene le funzioni lineari a tratti che si annullano agli estremi.
Indichiamo con φ_i la i-esima funzione di base associata al nodo x_i.
Introduciamo due funzioni lineari a tratti φ_a e φ_b che valgono 1 rispettivamente in a e b e zero in tutti gli altri nodi.

Problema discreto

Trovare $u_h = \alpha\varphi_a + \beta\varphi_b + w_h$ con $w_h \in V_0$ tale che

$$\int_a^b \left(\mu u_h'(x) v_h'(x) + \sigma u_h(x) v_h(x)\right) dx = \int_a^b f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_h.$$

La soluzione u_h ha la seguente rappresentazione

$$u_h(x) = \alpha\varphi_a(x) + \beta\varphi_b(x) + \sum_{j=1}^{N_h} u_j\varphi_j(x)$$

che sostituita nel problema discreto dà:

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j \int_a^b \left(\mu\varphi_j'\varphi_i' + \sigma\varphi_j\varphi_i\right) dx = \int_a^b f\varphi_i dx$$

$$- \alpha \int_a^b \left(\mu\varphi_a'\varphi_i' + \sigma\varphi_a\varphi_i\right) dx - \beta \int_a^b \left(\mu\varphi_b'\varphi_i' + \sigma\varphi_b\varphi_i\right) dx$$

Il sistema lineare risultante ha la stessa matrice del caso precedente e il termine noto che deve essere modificato per $i = 1$ e $i = N_h$.

Function

```
[x,u]=femP1D(mu,sigma,f,a,b,alfa,beta,N)
```

Input

`mu, sigma`	coefficienti
`f`	funzione al secondo membro
`a,b`	estremi dell'intervallo
`alfa,beta`	valori agli estremi
`N`	numero di punti interni

Output

`x`	punti della mesh
`u`	valori della soluzione

Esercizio 4

Si consideri l'equazione differenziale

$$-u'' = \left(2\pi^2 - \frac{1}{x^2}\right)\frac{2\sin(2\pi x)}{x} + \frac{4\pi\cos(2\pi x)}{x^2} \quad x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad u(2) = 2$$

La soluzione esatta è: $u(x) = x + \sin(2\pi x)/x$.
Risolvere l'equazione differenziale con elementi finiti lineari usando la function `femP1D` al variare di `N=[10 20 40 80 160 320]`.
Calcolare l'errore relativo in norma L^2 sia della funzione che della derivata usando la function `errore`.
Riportare opportunamente i risultati in scala bilogaritmica.

Esercizio 5

Si consideri l'equazione differenziale

$$-u'' + 3u = 12x^3 - 27x^2 - 18x + 21 \; x \in (0,2), \quad u(0) = u(2) = 1.$$

La soluzione esatta è: $u(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x + 1$.
Risolvere l'equazione differenziale con elementi finiti lineari usando la function `femP1D` al variare di `N=[10 20 40 80 160 320]`.
Calcolare l'errore relativo in norma L^2 sia della funzione che della derivata usando la function `errore`.
Riportare opportunamente i risultati in scala bilogaritmica.

Problema di Neumann

Problema

Trovare $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{aligned} &-(\mu u'(x))' + \sigma u(x) = f(x) \quad \text{per } x \in (a,b) \\ &u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{aligned}$$

Teorema

Se $\sigma > 0$ allora esiste una unica soluzione del problema di Neumann.
Se $\sigma = 0$ il problema ammette una unica soluzione tale che $\int_a^b u(x)dx = 0$ se f soddisfa la condizione di compatibilità

$$\int_a^b f(x)dx = -\beta + \alpha.$$

Elementi finiti - $\sigma > 0$

Problema debole

Posto $V = H^1(a, b)$, trovare $u \in V$ tale che

$$\int_a^b (\mu u'(x)v'(x) + \sigma u(x)v(x))\, dx$$
$$= \int_a^b f(x)v(x)\, dx + \mu(\beta v(b) - \alpha v(a)) \quad \forall v \in V.$$

Sia $X_h \subset V$ lo spazio delle funzioni lineari a tratti.

Problema discreto

Trovare $u_h \in X_h$ tale che

$$\int_a^b (\mu u_h'(x)v_h'(x) + \sigma u_h(x)v_h(x))\, dx$$
$$= \int_a^b f(x)v_h(x)\, dx + \mu(\beta v_h(b) - \alpha v_h(a)) \quad \forall v_h \in X_h.$$

La dimensione di X_h è $N_h + 2$, in quanto alle funzioni di base lineari a tratti dello spazio V_h dobbiamo aggiungere le due funzioni φ_0 e φ_{N_h+1} associate agli estremi.
La soluzione u_h ha la seguente rappresentazione

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^{N_h+1} u_j \varphi_j(x)$$

che sostituita nel problema discreto dà:

$$\sum_{j=0}^{N_h+1} u_j \int_a^b \left(\mu \varphi_j' \varphi_i' + \sigma \varphi_j \varphi_i\right) dx = \int_a^b f \varphi_i dx + \mu(\beta \varphi_i(b) - \alpha \varphi_i(a)).$$

- La matrice è una matrice tridiagonale con dimensione $N_h + 2$.
- Le diagonali sopra e sotto alla diagonale principale hanno gli stessi elementi della matrice per il problema di Dirichlet, mentre la diagonale principale ha il primo e ultimo termine che sono la metà di quelli della matrice per il problema di Dirichlet.
- Alla prima ed ultima componente del termine noto bisogna aggiungere il contributo delle condizioni al bordo.

Function

```
[x,u]=femP1N(mu,sigma,f,a,b,alfa,beta,N)
```

Input

`mu, sigma`	coefficienti
`f`	funzione al secondo membro
`a,b`	estremi dell'intervallo
`alfa,beta`	valori della derivata agli estremi
`N`	numero di punti interni

Output

`x`	punti della mesh
`u`	valori della soluzione

Esercizio 6

Si consideri l'equazione differenziale

$$-u'' + 4\pi^2 u = 8\pi^2\cos(2\pi x) + \frac{4\pi^2}{3}x^3 - 2\pi^2 x^2 - 2x + 1$$
$$u'(0) = u'(1) = 0.$$

La soluzione esatta è: $u(x) = \cos(2\pi x) + x^3/3 - x^2/2$.
Risolvere l'equazione differenziale con elementi finiti lineari usando la function `femP1N` al variare di `N=[10 20 40 80 160 320]`.
Calcolare l'errore relativo in norma L^2 sia della funzione che della derivata usando la function `errore`.
Riportare opportunamente i risultati in scala bilogaritmica.

Esercizio 6

Si consideri l'equazione differenziale

$$-u'' = 4 - 12x^2, \quad u'(0) = u'(1) = 0.$$

La soluzione esatta è: $u(x) = \cos(2\pi x) + x^3/3 - x^2/2 - 8/15$.
Risolvere l'equazione differenziale con elementi finiti lineari usando la function `femP1N` al variare di `N=[10 20 40 80 160 320]`.
Calcolare l'errore relativo in norma L^2 sia della funzione che della derivata usando la function `errore`.
Riportare opportunamente i risultati in scala bilogaritmica.