

# Finite element method in one dimension

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,  
<http://lucia-gastaldi.unibs.it>



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI BRESCIA

- 1 Second order differential equation
  - Weak formulation
  - Galerkin's method
  
- 2 Finite elements
  - Assemblaggio della matrice e del termine noto
  - Condizioni al bordo
  - Esercizi

# Dirichlet problem

## Problem in one dimension

Let

- ▶  $\Omega = ]a, b[$ ,
- ▶  $\mu \in \mathbb{R}$ , with  $\mu > 0$
- ▶  $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $0 \leq \sigma \leq \bar{\sigma}$
- ▶  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Find  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$\begin{aligned} -(\mu u'(x))' + \sigma u(x) &= f(x) \quad \text{per } x \in \Omega \\ u(a) &= \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{aligned}$$

# Problem with homogeneous Dirichlet boundary conditions

## Problem

$$\begin{aligned} -\mu u'' + \sigma u &= f \quad \text{in } \Omega = ]a, b[ \\ u(a) &= u(b) = 0 \end{aligned}$$

## Functional setting

We introduce the following Hilbert spaces

$$\mathbf{L}^2(a, b) = \{v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b v^2 dx < +\infty\}$$

$$H^1(a, b) = \{v \in \mathbf{L}^2(a, b) : v' \in \mathbf{L}^2(a, b)\}$$

$$V = H_0^1(a, b) = \{v \in H^1(a, b) : v(a) = v(b) = 0\}$$

endowed with the following norms

$$\|v\|_0 = \left( \int_a^b |v|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|v\|_1 = (\|v\|_0^2 + \|v'\|_0^2)^{1/2}$$

We multiply the equation by  $v \in V$  (test function) and integrate on  $(a, b)$ :

$$\int_a^b (-\mu u''(x) + \sigma u(x))v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx$$

By integration by parts we have

$$\int_a^b \mu u''(x)v(x) dx = [\mu u'(x)v(x)]_a^b - \int_a^b \mu u'(x)v'(x) dx$$

from which

$$\int_a^b (\mu u'(x)v'(x) + \sigma u(x)v(x)) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx$$

We set

$$a(u, v) = \int_a^b (\mu u'(x)v'(x) + \sigma u(x)v(x)) dx, \quad F(v) = \int_a^b f(x)v(x) dx$$

## Weak Problem

Find  $u \in V$  such that

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

## Lax-Milgram Lemma

Assume that the bilinear form  $a$  is continuous and coercive and that the linear functional  $F$  is bounded, that is

$$\exists M_a > 0 \text{ s.t. } a(u, v) \leq M_a \|u\|_V \|v\|_V$$

$$\exists \alpha > 0 \text{ s.t. } a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$$

$$F(v) \leq \|F\|_{V'} \|v\|_V$$

Then there exists a unique solution  $u \in V$  of the weak problem. Moreover, the following a priori estimate holds true

$$\|u\|_V \leq \frac{\|F\|_{V'}}{\alpha}.$$

# Galerkin's method

We consider a finite dimensional subspace  $V_h$  of  $V$ .

$$V_h \subset V, \quad \dim V_h = N(h) < +\infty$$

## Discrete problem

Find  $u_h \in V_h$  such that

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Let  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N(h)}\}$  be a basis for  $V_h$ , hence  $u_h = \sum_{j=1}^{N(h)} u_j \varphi_j$ .

The vector  $\underline{u} \in \mathbb{R}^{N(h)}$  with components  $u_j$  satisfies

$$a \left( \sum_{j=1}^{N(h)} u_j \varphi_j, \varphi_i \right) = F(\varphi_i) \text{ for all } i = 1, \dots, N(h).$$

# Galerkin's method

Since  $a$  is bilinear we have

$$\sum_{j=1}^{N(h)} u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = F(\varphi_i) \quad i = 1, \dots, N(h).$$

For simplicity, let us assume that  $\sigma$  is a constant function and define the following matrices with elements

$$K_{ij} = \int_a^b \varphi_j' \varphi_i' dx \quad M_{ij} = \int_a^b \varphi_j \varphi_i dx,$$

and the vector  $\underline{\mathbf{F}}$  with components

$$\underline{\mathbf{F}}_i = \int_a^b f \varphi_i dx.$$

Setting  $A = \mu K + \sigma M$ , the discrete problem is equivalent to the following **linear system**

$$A \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{F}}$$

with  $A$  symmetric and positive definite.



# Error estimates

We recall the definition of the norms

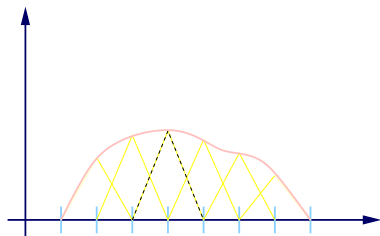
$$\|v\|_0 = \left( \int_a^b v^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|v\|_V = (\|v\|_0^2 + \|v'\|_0^2)^{1/2}, \quad \forall v \in V$$

## Céa's Lemma

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

The error is bounded by the best approximation in  $V_h$ .  
We need a good choice for  $V_h$ !

# Finite elements



Approximation in 1D with piecewise linear polynomials.  
Basis functions (shape functions): hat functions.

A finite element is defined by:

- 1) a domain (interval, triangle, tetrahedron, ...),
- 2) a finite dimensional space (polynomial),
- 3) a set of degrees of freedom **d.o.f.**

# Elementi finiti in 1D

- 1) dominio: intervallo
  - 2) spazio:  $\mathbb{P}_r$
  - 3) d.o.f.: dipendono dal grado dei polinomi
- elementi lineari: estremi (2)  
 elementi quadratici: estremi + punto medio (3)  
 ...

## Proprietà di approssimazione

Sia  $\Pi_h^1 u(x) = \sum_{i=1}^{N(h)} u(x_i) \varphi_i(x)$  l'interpolata lineare a tratti di  $u$   
 allora

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_0 \leq \|u - \Pi_h^1 u\|_0 \leq h^2 \|u''\|_0$$

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u' - v_h'\|_0 \leq \|u' - (\Pi_h^1 u)'\|_0 \leq h \|u''\|_0$$

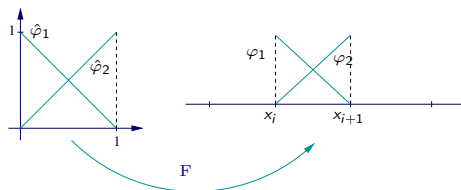
# Matrici di rigidezza e di massa

Le matrici di rigidezza  $K$  e di massa  $M$  hanno la seguente struttura:

$$K = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

# Elemento di riferimento ed elemento corrente



$\hat{K} = [0, 1]$   
 elemento di riferimento  
 $K = I_i = [x_{i-1}, x_i]$   
 elemento corrente

$\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$  funzioni di base su  $\hat{K}$ ;  
 $\varphi_1, \varphi_2$  funzioni di base su  $K$ .

$$F_K : \hat{K} \rightarrow K, \quad x = F_K(\hat{x})$$

$$\varphi(x) = \hat{\varphi}(F_K^{-1}(x))$$

Quindi

$$x = F_K(\hat{x}) = x_{i-1} + h\hat{x}.$$

# Calcolo del termine noto

Si ha

$$\underline{\mathbf{F}}_i = F(\varphi_i) = \int_{\Omega} f(x)\varphi_i(x)dx = \sum_K \int_K f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Passando all'elemento di riferimento si ha:

$$\begin{aligned} \int_K f(x)\varphi_i(x)dx &= \int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{x}))\hat{\varphi}_i(\hat{x})F'_K(\hat{x})d\hat{x} \\ &= h \int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{x}))\hat{\varphi}_i(\hat{x})d\hat{x} \end{aligned}$$

Per il calcolo di questo integrale occorrono delle **formule di quadratura** appropriate in modo che l'errore introdotto nell'uso delle formule di quadratura sia di *ordine superiore* rispetto all'errore di discretizzazione. Ad esempio, si possono usare le **formule di Gauss-Legendre**.

# Formule di Gauss - Legendre

Nella tabella qui sotto,  $n$  indica il grado dei polinomi interpolanti. I nodi  $\tilde{x}_i$  e i pesi  $\tilde{w}_i$  sono relativi all'intervallo  $[-1, 1]$ .

$n$	nodii $\tilde{x}_i \ i = 0, \dots, n$	pesi $\tilde{w}_i \ i = 0, \dots, n$
0	(0)	(2)
1	$(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	(1, 1)
2	$(-\sqrt{15}/5, 0, \sqrt{15}/5)$	(5/9, 8/9, 5/9)

$n$	G.d.P.	ordine
0	1	$CH^2 \max  f^{(2)} $
1	3	$CH^4 \max  f^{(4)} $
2	5	$CH^6 \max  f^{(6)} $

I nodi  $\hat{x}_i$  e i pesi  $\hat{w}_i$  sull'intervallo  $[0, 1]$  si ottengono con le trasformazioni:

$$\hat{x}_i = \frac{1 + \tilde{x}_i}{2}, \quad \hat{w}_i = \tilde{w}_i.$$

# Assemblaggio del termine noto

Strategia generale:

- ▶ Ciclo sugli elementi  $ie = 1, \dots, ne$
- ▶ Calcolo del vettore termine noto locale  $F_i^{loc} = F(\varphi_i)$ ,  
 $i = 1, \dots, ndof$
- ▶ Ciclo sui gradi di libertà locali  $i = 1, \dots, ndof$  e assemblaggio del termine noto globale  $F_{iglob} = F_{iglob} + F_i^{loc}$
- ▶ Imposizione delle condizioni al bordo



## Condizioni di Dirichlet omogenee

Il vettore del termine noto con questa costruzione ha due elementi in più corrispondenti alle funzioni di base associate agli estremi dell'intervallo.

$$\underline{\mathbf{F}}_{prima} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Basta eliminare la prima e l'ultima componente:

$$\underline{\mathbf{F}}_{dopo} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

# Function per la soluzione con elementi finiti

```
[x,u]=fem1d(mu,f,sigma,a,b,N,k)
```

## Input

<code>mu</code>	coefficient of the second derivative
<code>sigma</code>	function in front of $u$
<code>f</code>	right hand side
<code>a,b</code>	end points
<code>N</code>	number of the intervals
<code>k</code>	degree 1 or 2

## Output

<code>x</code>	nodes
<code>u</code>	solution

# Main steps

- ▶ Basis functions on the reference element `shape.m`
- ▶ Construction of the mesh
  - ▶ compute  $h$
  - ▶ compute the nodes
- ▶ Construction of the matrix and the load vector
  - ▶ construct matrices  $K$ ,  $M$  with the sparse format
  - ▶ construct the right hand side `carico.m`  
Cicle on the elements
    - compute the local right hand side
    - assemble of the right hand side
- ▶ Boundary conditions
- ▶ Solution of the linear system
- ▶ Output  $x, u$

# Error

Conoscendo la soluzione esatta, la function **errore** fornisce le due quantità:

$$\|u - u_h\|_0 \quad \|u' - u'_h\|_0.$$

`[E0,E1]=errore(u,a,b,esatta,desatta,N)`

## Input

<code>u</code>	vettore soluzione
<code>a,b</code>	estremi dell'intervallo
<code>esatta, desatta</code>	espressioni analitiche della soluzione esatta e della sua derivata
<code>N</code>	numero degli intervalli

## Output

<code>E0</code>	errore in $L^2$ della soluzione
<code>E1</code>	errore in $L^2$ della derivata

# Esercizio 1

Si consideri l'equazione differenziale

$$-u'' = f \quad x \in (0, 1) \quad u(0) = u(1) = 0$$

essendo  $f$  una delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2 & f_2(x) &= -12x^2 + 12x - 2 \\ f_3(x) &= 4\pi^2 \sin(2\pi x) & f_4(x) &= e^x(1 + x) \end{aligned}$$

Risolvere l'equazione differenziale con elementi finiti lineari usando la function `femP1` al variare di  $N=[10 \ 20 \ 40 \ 80 \ 160 \ 320]$ .

Calcolare l'errore relativo in norma  $L^2$  sia della funzione che della derivata usando la function `errore`. Calcolare inoltre l'errore relativo in norma euclidea di  $\mathbb{R}^{N+1}$  del vettore soluzione rispetto ai valori della soluzione esatta nei nodi.

Riportare opportunamente i risultati in scala bilogarithmica.

# Soluzioni dell'esercizio 1

La soluzione esatta dell'equazione differenziale dell'esercizio 1 ha la seguente espressione analitica:

$$u_1(x) = x(1 - x)$$

$$u_2(x) = x^2(1 - x)^2$$

$$u_3(x) = \sin(2\pi x)$$

$$u_4(x) = (e^x - 1)(1 - x)$$

## Esercizio 2

Si consideri l'equazione differenziale

$$-u'' + u = f \quad x \in (0, 1) \quad u(0) = u(1) = 0$$

essendo  $f$  calcolata in maniera opportuna in modo che la soluzione esatta sia la stessa dell'esercizio 1. Risolvere l'equazione differenziale con elementi finiti lineari usando la function `femP1` al variare di  $N=[10 \ 20 \ 40 \ 80 \ 160 \ 320]$ .

Calcolare l'errore relativo in norma  $L^2$  sia della funzione che della derivata usando la function `errore`. Calcolare inoltre l'errore relativo in norma euclidea di  $\mathbb{R}^{N+1}$  del vettore soluzione rispetto ai valori della soluzione esatta nei nodi.

Riportare opportunamente i risultati in scala bilogarithmica.

## Esercizio 3

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$-u''(x) = f(x) \quad x \in (-1, 1), \quad u(-1) = u(1) = 0$$

essendo  $f(x) = \alpha(\alpha - 1)|x|^{\alpha-2}$ .

La soluzione esatta è:  $u(x) = 1 - |x|^\alpha$ .

Si considerino i seguenti valori  $\alpha = 3, 2, 5/3, 3/2, 5/4$ .

Plottare la soluzione insieme alla soluzione esatta.

Plottare gli errori in norma  $L^2$  sia della funzione che della derivata e determinare l'ordine di convergenza.



# Perturbazione singolare

$$-\varepsilon u'' + u = 1 \quad x \in [0, 1] \quad u(0) = u(1) = 0$$

Soluzione:

$$u = \frac{-\sinh\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sinh\left(\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} + 1$$

- ▶ Si consideri  $\varepsilon = 1e-1, 1e-3, 1e-5$  e si calcoli la soluzione per  $N = 10$  e la si confronti con la soluzione esatta.
- ▶ Per  $\varepsilon = 1e-3, 1e-5$  si possono osservare oscillazioni indesiderate. Trovare il più piccolo  $N$  multiplo di 10 per cui le soluzioni numeriche non presentano oscillazioni nei due casi.
- ▶ Gli elementi della matrice del sistema sono dati da:

$$A_{ii} = \frac{2\varepsilon}{h} + \frac{2h}{3}, \quad A_{i,i-1} = A_{i,i+1} = -\frac{\varepsilon}{h} + \frac{h}{6}$$

Verificare che le oscillazioni si verificano fintanto che  $A_{i,i-1} = A_{i,i+1} > 0$ .