Numeri di macchina

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,
http://lucia-gastaldi.unibs.it

Indice

Formato di memorizzazione dei numeri

- **Singola** (o semplice) precisione, 4 Bytes (32 bits)
- **Doppia** precisione, 8 Bytes (64 bits)

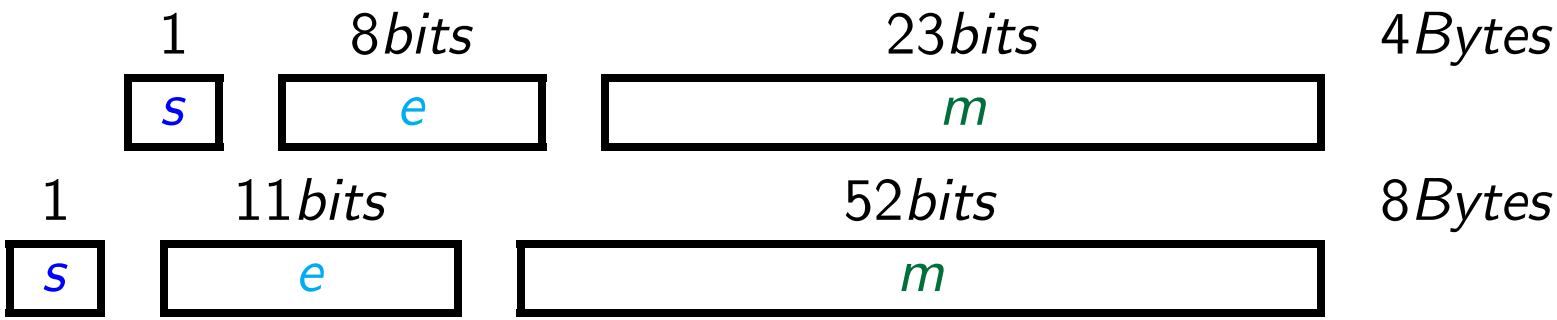
Come vengono utilizzati questi Bytes?

Formato di memorizzazione dei numeri

Si considera la forma esponenziale di un numero reale:

$$x = 123456.789 = (-1)^0 1.23456789 \cdot 10^5 = (-1)^s m \cdot \beta^e$$

$s = 0, 1$; m mantissa; β base (es: 2,10); e esponente



Insieme dei numeri rappresentabili

$$x = (-1)^s m \cdot \beta^e = (-1)^s (a_1 a_2 \cdots a_t) \cdot \beta^e = (-1)^s \beta^e \sum_{i=1}^{t} a_i \beta^{-i}$$

con le seguenti restrizioni:

$L \leq e \leq U$ tipicamente $L < 0$ e $U > 0$ ($L = -1021, U = 1024$)
$\beta \geq 2$
$0 \leq a_i \leq \beta - 1$ per $i = 1, \cdots, t, \quad a_1 \neq 0$

Le 11 cifre binarie dell'esponente danno i numeri interi da 0 a 2047.

Floating point in Matlab

$x_M = (-1)^s \, 2^e (1 + f)$ con $U = 1023$ e $L = -1022$.
Il segno di e viene ottenuto salvando $e + 1023$, che va da 1 a $2^{11} - 2$.

Codifiche particolari

valore	esponente	mantissa
± 0	$L - 1$	0
`Inf`	$U + 1$	0
`NaN`	$U + 1$	$\neq 0$

Unicità della rappresentazione

$$.1000 \cdot 10^1 \quad .0100 \cdot 10^2 \quad .0010 \cdot 10^3 \quad .0001 \cdot 10^4$$

sono tutte rappresentazioni di 1.
Per avere **unicità della rappresentazione** si richiede:

$$a_1 \neq 0; \qquad \Rightarrow \beta^{-1} \leq m < 1$$

La rappresentazione di x si dice **normalizzata**.

$$x_{min} = \beta^{L-1} \leq |x| \leq \beta^{U-1} \frac{\beta - \beta^{-t}}{\beta - 1} = x_{max}$$

`realmin=2^(-1022), realmax=2^1023*(2-2^(-52))`
Si può rinunciare alla restrizione che $a_1 \neq 0$ nel caso $e = L$ e si ha la rappresentazione **floating-point denormalizzata**.

$$\beta^{-t} \leq m < 1 \quad \text{e} \quad x_{min} = \beta^{L-t}$$

Arrotondamento

$$x = (-1)^s \beta^e \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i \beta^{-i}$$

numero reale

Se $L \leq e \leq U$ allora l'**arrotondamento** di x $fl(x)$ è definito come il numero floating point più vicino a x.

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \frac{\beta^{-t}\beta^e}{2|m|\beta^e} \leq \frac{1}{2}\beta^{1-t} = \frac{1}{2}\epsilon_M = \mathtt{u}$$

eps	**precisione di macchina**	eps+1 > 1	eps= β^{1-t}
u	**unità di arrotondamento**		u=eps/2

Calcolo di eps

```
Eps=1;
while 1+Eps>1
 Eps=Eps/2;
end
Eps=Eps*2
```

In Matlab:
eps= 2^{-52}
u= 2^{-53}

Operazioni di macchina

Aritmetica IEC559

Lo standard IEC559 provvede a definire le operazioni sull'insieme dei numeri di macchina in modo che ogni operazione produce un risultato all'interno del sistema stesso.

Supponiamo che x e y siano due numeri reali e che $fl(x)$ e $fl(y)$ siano i loro arrotondamenti.
Indichiamo con $\circ$ una delle tre operazioni $*$, $/$, $\pm$ eseguita in matematica esatta, e con $\hat{\circ}$ l'operazione in matematica di macchina corrispondente. Si può pensare che l'operazione di macchina venga effettuata nel modo seguente:

$$fl(x)\hat{\circ}fl(y) = fl(fl(x) \circ fl(y)).$$

Risultati per alcune operazioni eccezionali

eccezione	esempi	risultato
operazione non valida	$0/0$, $0 \cdot \infty$	`NaN`
overflow		`Inf`
divisone per zero	$1/0$	`Inf`
underflow		numeri sottonormali

Forme indeterminate:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^{0}, \quad \infty^{0}.$$

Propagazione degli errori di arrotondamento

Confrontiamo il risultato esatto dell'operazione con il risultato approssimato ottenuto con l'operazione di macchina, vogliamo quindi valutare il seguente **errore relativo**

$$\frac{|x \circ y - fl(x) \hat{\circ} fl(y)|}{|x \circ y|}.$$

Stabilità

Diciamo che un'operazione di macchina è **stabile** se l'errore relativo rimane limitato dagli errori relativi introdotti nell'arrotondamento dei numeri x e y.

Stabilità delle operazioni di macchina

L'errore relativo commesso nell'effettuare un'operazione di macchina può essere scritto come segue:

$$\frac{|x \circ y - fl(x) \hat{\circ} fl(y)|}{|x \circ y|}$$

$$\leq \frac{|x \circ y - fl(x) \circ fl(y)|}{|x \circ y|} \quad \textbf{propagazione}$$

$$+ \frac{|fl(x) \circ fl(y) - fl(fl(x) \circ fl(y))|}{|x \circ y|} \quad \textbf{arrotondamento}$$

e si ottiene per il termine di arrotondamento:

$$\frac{|fl(x) \circ fl(y) - fl(fl(x) \circ fl(y))|}{|x \circ y|} \leq \mathtt{u} \quad \textbf{precisione di macchina}.$$

Stabilità della moltiplicazione

Per la definizione dell'arrotondamento di un numero e della precisione di macchina, si può scrivere:

$$fl(x) = x(1+\delta_1), \quad fl(y) = y(1+\delta_2)$$

essendo $|\delta_1| \leq \mathtt{u}$ e $|\delta_2| \leq \mathtt{u}$.

Teorema

La moltiplicazione è stabile.

Dimostrazione

Valutiamo il termine di propagazione dell'errore:

$$\frac{|x * y - fl(x) * fl(y)|}{|x * y|} = \frac{|x * y - x(1+\delta_1) * y(1+\delta_2)|}{|x * y|}$$
$$= |\delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2| \leq 3\mathtt{u}.$$

■

Stabilità della divisione

Teorema

La divisione è stabile.

Dimostrazione

Valutiamo il termine di propagazione dell'errore:

$$\frac{|x/y - fl(x)/fl(y)|}{|x/y|} = \frac{|x/y - x(1+\delta_1)/y(1+\delta_2)|}{|x/y|}$$

$$= \left|1 - \frac{1+\delta_1}{1+\delta_2}\right| = \left|\frac{1+\delta_2-1-\delta_1}{1+\delta_2}\right|$$

$$= \left|\frac{\delta_2 - \delta_1}{1+\delta_2}\right| \leq 2\mathrm{u}.$$

■

Instabilità dell'addizione e della sottrazione

Ripetiamo l'analisi fatta nel caso della moltiplicazione e della divisione:

$$\frac{|x+y-(fl(x)+fl(y))|}{|x+y|} = \frac{|x+y-x(1+\delta_1)-y(1+\delta_2)|}{|x+y|}$$
$$= \frac{|x\delta_1+y\delta_2|}{|x+y|} \leq \frac{|x|}{|x+y|}\delta_1 + \frac{|y|}{|x+y|}\delta_2.$$

Nel caso in cui $|x+y|$ diventa molto piccolo rispetto ad x e y si ha che l'errore commesso può essere amplificato senza nessun controllo.

L'addizione e la sottrazione non sono operazioni stabili.

Rappresentazione non esatta

Il numero $t = 0.1$ non ha una rappresentazione esatta.
La rappresentazione di $t = 0.1$ in base binaria richiede infinite cifre:

$$0.1 = 1\cdot 2^{-4}+1\cdot 2^{-5}+0\cdot 2^{-6}+0\cdot 2^{-7}+1\cdot 2^{-8}+1\cdot 2^{-9}+0\cdot 2^{-10}+0\cdot 2^{-11}+1\cdot 2^{-12}+\ldots$$

ossia

$$0.1 = 0.0001100110011001100110011001100110011001100110011001100110011001$$
$$001100110\ldots$$

Quindi

$$fl(0.1) = 0.0001100110011001100110011001100110011001100110011001100110011010$$

Sommando 10 volte 0.1 non si ottiene 1.

```
a(1)=0
for i=1:10
 a=a+0.1;
end
a
diff=a-1
```

Effetto dell'ordine delle operazioni

Primo esempio

```
b=1e-16+1-1e-16
c=1e-16+1e-16+1
b-c
b==c
```

Secondo esempio

La funzione

$$F(x) = 1 - x * \left(\frac{x+1}{x} - 1 \right)$$

vale identicamente 0 per ogni valore $x \neq 0$.
Calcoliamo il valore di $F(x)/\texttt{eps}$ per ogni valore intero in due modi diversi:

```
f=@(n) (1-n.*((n+1)./n-1))./eps
plot(f(1:256),'.')
g=@(n) (1-n.*((n+1)./n)+n)./eps
hold on
plot(g(1:256),'.r')
```

Cancellazione numerica

Consideriamo la funzione $h(x) = \sqrt{x+1} - 1$.
Assegniamo la funzione `h=@(x) sqrt(x+1)-1;`.
Facciamo il grafico nell'intervallo $[-1, 1]$ con il comando

```
fplot(h,[-1,1])
```

Studiamo l'effetto della cancellazione numerica per valori di x vicino a 0.

```
y=0:(1/16):16;
x=eps*y;
plot(x,h(x))
```

Usiamo ora l'espressione alternativa `k=@(x) x./(sqrt(x+1)+1);`
e riproduciamo il grafico sulla figura precedente:

```
hold on
plot(x,k(x),'r--')
legend('h','k','Location','NorthWest')
```

Proprietà associativa

Le operazioni di macchina non godono della proprietà associativa.

Esempio

Sia $a = 0.23371258 \cdot 10^{-10}$

$b = 0.71133225533678429 \cdot 10^{4} \quad c = -0.71133225533677811 \cdot 10^{4}$

allora si ha:

$$\begin{aligned}(a+b)+c &= 7.113322553367867e+03 - 7.113322553367781e+03 \\ &= 8.549250196665525 \cdot 10^{-11}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a+(b+c) &= 2.337125800000000e-11 + 6.184563972055912e-11 \\ &= 8.521689772055913e-11\end{aligned}$$