

Interpolazione

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,
<http://lucia-gastaldi.unibs.it>

Indice

- 1 Interpolazione
- 2 Interpolazione polinomiale
 - Polinomi
 - Valutazione di un polinomio
 - Algoritmo di Horner–Ruffini
 - Errore di approssimazione
 - Nodi di Chebyshev
- 3 Interpolazione a tratti
 - Interpolazione a tratti
 - Spline
 - Le funzioni MATLAB per l'interpolazione

Interpolazione

Problema Dati $n + 1$ punti $(x_i, y_i = f(x_i))$ per $i = 0, 1, \dots, n$ si cerca una funzione approssimante $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\tilde{f}(x_i) = y_i \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

La funzione \tilde{f} è detta **interpolatore** di f e le condizioni (1) sono dette **condizioni di interpolazione**.

Interpolazione polinomiale

$$\tilde{f}(x) = p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

Polinomi

Un polinomio di grado n , con n intero non negativo, è una funzione del tipo

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{j=0}^n a_jx^{n-j}$$

dove $a_j \in \mathbb{R}$, per $j = 0, 1, 2, \dots, n$, sono i coefficienti del polinomio.

Nota bene

Il polinomio è individuato dai coefficienti che devono essere memorizzati in un vettore.

In MATLAB i coefficienti devono essere **ordinati** a partire da quello corrispondente al termine di grado **più elevato** fino a quello di grado zero.

I coefficienti nulli vanno esplicitati.

Ad esempio al polinomio $p(x) = 1 - 2x + 4x^3$ si associa il vettore $p = [4 \ 0 \ -2 \ 1]$.

Algoritmo di Horner–Ruffini

L'algoritmo di Horner–Ruffini permette di calcolare il valore di un polinomio in un punto ad un **costo computazionale** inferiore rispetto all'uso della formula

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$$

Il polinomio può essere scritto nella forma di Horner:

$$p(x) = (((((a_0x + a_1)x + a_2) \dots)x + a_{n-1})x + a_n.$$

Numero di operazioni

- Nel primo caso: $n(n+1)/2$ ($1 + 2 + \cdots + n$) **moltiplicazioni** + n **somme** per ciascuna componente di x

Totale $\frac{n}{2}(n+3)N$ se N è il numero delle componenti di x

- Nel secondo caso: n **moltiplicazioni** + n **somme** per ciascuna componente di x

polyval

La function `polyval` valuta il valore di un polinomio usando l'algoritmo di `Horner_Ruffini`.

```
yi=polyval(p,xi)
```

Input

`p` vettore dei coefficienti;
`xi` punti in cui si vuole calcolare il valore del polinomio.

Output

`yi` valore del polinomio `yi` ha la stessa dimensione di `xi`.

Quindi per calcolare il valore del polinomio $p(x) = 1 + 2x - 4x^3$ nei punti xi distribuiti in maniera equispaziata nell'intervallo $[a, b]$ si può usare la seguente sequenza di comandi:

```
>> xi=linspace(-1,1,101);  
>> p=[-4 0 2 1];  
>> yi=polyval(p,xi);
```

Esercizi

Esercizio 1

Riportare in una stessa figura il grafico dei seguenti due polinomi:

$$p_1(x) = 1 - 3x - 4x^2 + 2x^5 \quad x \in [-3/2, 3/2]$$

$$p_2(x) = 2 + 3x - 2x^3 - 3x^4 \quad x \in [-3/2, 3/2]$$

Esercizio 2

Sia x il vettore che contiene i punti dell'intervallo $[0.995, 1.005]$ equispaziati a distanza 10^{-4} (usare `x=.995:1.e-4:1.005`). Fare il grafico del polinomio:

$$p(x) = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1.$$

Confrontare il grafico ottenuto con quello della funzione $f(x) = (x - 1)^6$ nello stesso intervallo.

Esistenza ed unicità del polinomio interpolatore

Teorema

Per ogni insieme di punti (x_i, y_i) per $i = 0, 1, \dots, n$, con gli x_i distinti tra loro, esiste un unico polinomio di grado n , che indicheremo con Π_n , tale che

$$\Pi_n(x_i) = y_i \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, n.$$

Esso viene detto **polinomio interpolatore** dei valori y_i nei **nodi** x_i .

Se per una opportuna funzione si ha $y_i = f(x_i)$ allora indichiamo con $\Pi_n f$ il polinomio interpolatore che **approssima** la funzione f .

polyfit

La function **polyfit** fornisce i coefficienti del polinomio Π_n .

La sintassi di **polyfit** è:

```
p=polyfit(x,y,n)
```

dove x contiene i nodi x_i , y contiene i valori della funzione y_i e n è il **grado** del polinomio interpolatore.

Ad esempio:

```
>> x=0:4;  
>> y=[2 0 -1 -2 1];  
>> p=polyfit(x,y,4)
```

```
p = 0.2083    -1.4167     3.2917    -4.0833     2.0000
```

Per fare il grafico del polinomio interpolatore:

```
>> xi=linspace(0,4,51);  
>> yp=polyval(p,xi);  
>> plot(xi,yp,x,y,'or')
```

Esercizio 3

Calcolo dei coefficienti del polinomio interpolatore e sua rappresentazione

Si consideri la funzione $f(x) = (1 - x^2) \arctan(x) + e^x$ nell'intervallo $[-4, 4]$. Dati i nodi $x = [-3 \ -1 \ 2 \ 3]$; , usare il comando `polyfit` per trovare i coefficienti del polinomio interpolatore.

Riportare in una stessa figura il grafico del polinomio interpolatore e della funzione f .

Suggerimento

Per ottenere il grafico valutare il polinomio (usare il comando `polyval`) e la funzione in un numero appropriato di punti equispaziati nell'intervallo dato (usare il comando `linspace`).

Problema di climatologia

La temperatura dell'aria in prossimità del suolo dipende dalla concentrazione K di acido carbonico. Nel file `temp_media.m` in corrispondenza a $K = 0.67$ sono riportate le variazioni della temperatura media che si avrebbero nel globo rispetto alla temperatura media corrispondente ad un valore di riferimento dell'acido carbonico. I valori sono riferiti a diverse latitudini per `lat=-55:10:65`.

- Calcolare il polinomio di grado 4 utilizzando i dati della variazione di temperatura alle latitudini -55, -25, 5, 35, 65.
- Riportare in una figura il grafico del polinomio insieme a tutti i valori della variazione di temperatura disponibili.
- Utilizzare poi tutti i valori disponibili per calcolare il polinomio di grado 12. Confrontare il grafico ottenuto con quello del polinomio di grado 4.

Approssimazione di una funzione

Si consideri la seguente funzione $f(x) = e^x$, $x \in [-1, 1]$.

Esercizio 4

- Interpolare con polinomi di grado $n=2:2:12$, la funzione data, usando $n + 1$ punti equispaziati nell'intervallo $[-1, 1]$.
- Riportare il grafico di ciascun polinomio interpolatore insieme con quello della funzione data.
- Calcolare per ciascun valore di n l'errore commesso ossia

$$E_n = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \Pi_n(x)|$$

Costruire un vettore contenente gli errori ottenuti per ciascun valore di n e riportare gli errori in un grafico in scala semilogaritmica `semilogy(n,E)`.

Traccia per la risoluzione dell'esercizio

1. Assegnare un vettore che contiene i valori di n .
2. Costruire il vettore `xi` dei punti per valutare tutti i polinomi.
3. Valutare la funzione in `xi` (risultato `yi`).
4. Per ogni valore di n (`for i=1:length(n)`) eseguire la seguente sequenza:
 - Costruire il vettore `x` dei nodi con il comando `x=linspace(a,b,n(i)+1)`.
 - Valutare la funzione nei nodi `y=f(x)`.
 - Trovare i coefficienti del polinomio con il comando `polyfit`.
 - Valutare il polinomio nei punti `xi` con il comando `polyval` (risultato `py`).
 - Plottare la funzione e il polinomio di grado n (inserire una pausa `pause`).
 - Calcolare l'errore
$$E(i)=\text{norm}(y_i-p_y, \text{inf})$$
5. Plottare l'errore con il comando `semilogy(n,E)`.

Errore di approssimazione

Teorema: stima dell'errore di interpolazione

Dati $n + 1$ nodi di interpolazione x_i per $i = 0, 1, \dots, n$. Sia f una funzione derivabile con continuità $n + 1$ volte in un intervallo I contenente tutti i nodi di interpolazione e sia Π_n il polinomio interpolatore nei nodi x_i , allora per ogni $x \in I$, esiste un punto $\xi \in I$ tale che

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Nel caso di punti equidistanti, con $x_{i+1} = x_i + h$, si ha:

$$|E_n(x)| = |f(x) - \Pi_n(x)| \leq \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)| \frac{h^{n+1}}{4(n+1)}.$$

Funzione di Runge

Si consideri la **funzione di Runge** $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-5, 5]$.

Esercizio 5

- Interpolare con polinomi di grado $n=2:2:12$, la funzione data, usando $n + 1$ punti equispaziati nell'intervallo $[-5, 5]$.
- Riportare il grafico di ciascun polinomio interpolatore insieme con quello della funzione data.
- Calcolare per ciascun valore di n l'errore commesso ossia

$$E_n = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \Pi_n(x)|$$

Costruire un vettore contenente gli errori ottenuti per ciascun valore di n e riportare gli errori in un grafico in scala semilogaritmica `semilogy(n,E)`.

Interpolazione di Chebyshev

Il fenomeno di Runge può essere evitato utilizzando **opportune distribuzioni** di nodi.

Nell'intervallo $[a, b]$ consideriamo i nodi x_i dati da:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \hat{x}_i \quad \text{con } \hat{x}_i = -\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right), \quad i = 0, \dots, n.$$

I punti $\hat{x}_i \in [-1, 1]$ si dicono **nodi di Chebyshev**.

Teorema di Bernstein

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe \mathbf{C}^1 . Sia Π_n il polinomio interpolatore di grado n costruito usando i nodi di Chebyshev.

Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \Pi_n f\|_{\infty} = 0.$$

Calcolo del polinomio con nodi di Chebyshev

Esercizio 6

Calcolare il polinomio di grado 7 che interpola la seguente funzione usando 8 nodi di Chebyshev

$$f(x) = x^2 + \frac{10}{\sin(x) + 1.2} \quad x \in [-2, 8].$$

Usare la seguente istruzione per costruire i nodi di Chebyshev:
`xc=(a+b)/2-(b-a)/2*cos(pi*(0:n)/n)`

Funzione di Runge

Esercizio 7

Per $n=2:2:12$, eseguire le seguenti operazioni:

- Interpolare la funzione di Runge nell'intervallo $[-5, 5]$ con i polinomi di grado n , costruiti usando $n + 1$ nodi di Chebyshev e $n + 1$ punti equidistanti nell'intervallo $[-5, 5]$.
- Usando il comando `subplot` riportare 4 grafici contenenti rispettivamente:
 - la funzione;
 - la funzione e il polinomio interpolatore con nodi equispaziati;
 - la funzione e il polinomio interpolatore con nodi di Chebyshev;
 - la funzione e i due polinomi interpolatori.

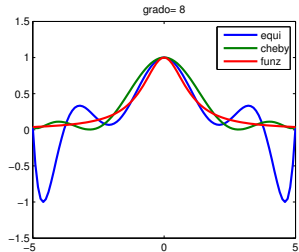
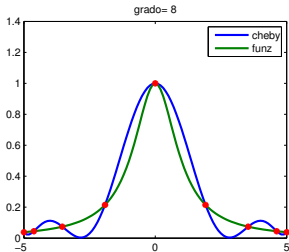
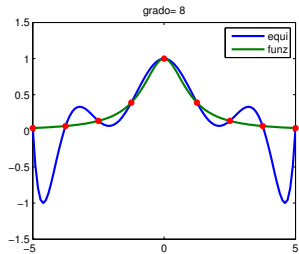
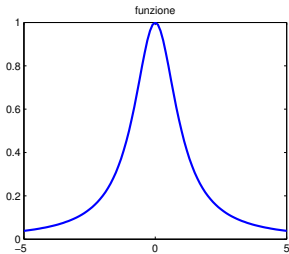
Si veda la figura nella pagina seguente.

- Calcolare per ciascun valore di n l'errore commesso.

Riportare gli errori per i due polinomi in uno stesso grafico in scala semilogaritmica `semilogy(n, E1, n, E2)`.

Ripetere l'esercizio usando la funzione $f(x) = \sin(x)$ per $x \in [0, 2\pi]$.

Figura



Interpolazione a tratti

Dato un'intervallo $I = [a, b]$, si introduce una **partizione** mediante un **numero finito** di punti

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b;$$

$I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, m$ indica il k -esimo sottointervallo.

Definizione

Si definisce **polinomio a tratti** una funzione $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$g(x) = p_n(x) \quad \forall x \in I_k,$$

essendo $p_n(x)$ un polinomio di grado n .

Interpolazione lineare a tratti

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione sufficientemente regolare.

Problema

costruire un polinomio lineare a tratti che interpoli la funzione f nei nodi x_i , $i = 0, \dots, n$.

Consideriamo la partizione dell'intervallo $[x_0, x_n]$ data dai nodi x_i . Quindi su ciascun intervallino $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, \dots, n$ il polinomio interpolatore a tratti è

$$g(x) = f(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Stima dell'errore di approssimazione

Sia $H = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$. Sia f una funzione continua insieme alle sue derivate prima e seconda. Sia g il polinomio lineare a tratti definito prima.

Per ogni $i = 1, \dots, n$ esiste un punto $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tale che

$$f(x) - g(x) = \frac{f''(\eta_i)}{2} (x - x_{i-1})(x - x_i) \quad \text{per } x \in [x_{i-1}, x_i],$$

da cui segue la seguente maggiorazione:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq i \leq n} \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} |f(x) - g(x)| \\ & \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} |f''(x)| \leq \frac{H^2}{8} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|. \end{aligned}$$

Spline

Siano x_i , per $i = 0, \dots, n, n+1$ nodi distinti e ordinati sull'intervallo $[a, b]$, tali che $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Definizione

La funzione $s_m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una **funzione spline** di grado m relativa ai nodi x_i se

- $s_m(x)$ per $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, è un polinomio di grado m .
- La funzione s_m è continua sull'intervallo $[a, b]$ insieme alle sue derivate fino all'ordine $m - 1$.

La spline più usata è la **spline cubica** s_3 .

Stime dell'errore

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(r)}(x) - s_3^{(r)}(x)| \leq C_r H^{4-r} \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(4)}(x)| \quad r = 0, 1, 2$$

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n, x \neq \{x_0, \dots, x_n\}} |f^{(3)}(x) - s_3^{(3)}(x)| \leq C_3 H \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(4)}(x)|$$

Le funzioni MATLAB per l'interpolazione

| Funzione | Significato |
|-----------------|--|
| interp1 | Interpolazione 1D. |
| interp2 | Interpolazione 2D. |
| interp3 | Interpolazione 3D. |
| spline | Spline cubica interpolante. |
| pchip | Interpolazione cubica "shape preserving" |
| interpft | Interpolazione mediante il metodo FFT. |

interp1 e spline

```
yi=interp1(x,y,z,metodo)
```

`x`, `y` specificano le coordinate dei punti di interpolazione.
`z` sono i punti in cui si vuole valutare il valore interpolato.
`metodo` è una stringa di caratteri che specifica il metodo da utilizzare:

- `metodo='nearest'` si sceglie il valore nel nodo di interpolazione più vicino;
- `metodo='linear'` interpolazione lineare a tratti;
- `metodo='spline'` interpolazione con spline cubica;
- `metodo='pchip'` o `metodo='cubic'` interpolazione di Hermite cubica a tratti shape preserving.

```
s=spline(x,y,z)
```

valuta nei punti `z`, la spline cubica che passa per i punti di ascissa `x` e ordinata `y`.

Confronto fra i diversi metodi di interpolazione

Considerare i seguenti punti:

```
x=1:6;
```

```
y=[16 18 21 17 15 12];.
```

- Usare l'interpolazione polinomiale e tutti i metodi disponibili nella function `interp1` per interpolare i punti dati.
- Riportare separatamente i grafici delle funzioni ottenute insieme ai nodi marcati con un pallino. Usare il comando `subplot` per avere tutti i grafici in una stessa finestra.
- Riportare in una stessa figura il grafico ottenuto con le spline e con il metodo `pchip` (shape preserving piecewise cubic).

Esercizi

Esercizio 8

- Calcolare l'approssimazione spline e lineare a tratti relative alla funzione di Runge nell'intervallo $[-1, 1]$, usando $n + 1$ punti equidistribuiti nell'intervallo dato essendo $n=2:2:20$. Usare le function `spline` e `interp1`.
- Calcolare per ciascun valore di n l'errore commesso ossia

$$E_n = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \Pi_n(x)|$$

Costruire un vettore contenente gli errori ottenuti per ciascun valore di n e riportare gli errori in un grafico in scala bilogarithmica `loglog(n,E)`.

Esercizio 9

- Ripetere l'esercizio 8 approssimando la funzione di Runge nell'intervallo $[-5, 5]$.
- Sempre sull'intervallo $[-5, 5]$ usare n punti invece che $n + 1$.

Esercizio 10

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 + \frac{10}{\sin(x) + 1.2} \quad x \in [-2, 8].$$

Posto $N = [4, 8, 16, 32, 64, 128, 256]$, si suddivide l'intervallo $[-2, 8]$ in $N + 1$ parti uguali. La funzione lineare a tratti che interpola la funzione ha la seguente espressione $L_1(x) = \sum_{j=0}^{N+1} f(x_j)\varphi_j(x)$ essendo $\varphi_j(x)$ le funzioni di base usate per gli elementi finiti lineari a tratti. Si determini il vettore u dei valori della funzione f nei punti di suddivisione (compresi gli estremi dell'intervallo). Calcolare l'errore di interpolazione nella norma integrale per la funzione e la sua derivata

$$\left(\int_{-2}^8 |f(x) - L_1(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \left(\int_{-2}^8 |f'(x) - L_1'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

usando la function errore che si trova nella cartella fem2015. Riportare gli errori in scala bilogarithmica e verificare che l'ordine di convergenza per la funzione è il secondo mentre per la derivata è il primo.