

# Integrazione numerica

Lucia Gastaldi

DICATAM - Sez. di Matematica,  
<http://lucia-gastaldi.unibs.it>

# Indice

- 1 Formule di quadratura semplici e composite
  - Formule di quadratura
  - Grado di precisione
  - Formule di base
  - L'integrazione numerica con MATLAB
  
- 2 Formule adattative

# Integrazione di funzioni

## Problema

Data la funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, si calcoli il valore dell'integrale

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Una **formula di quadratura** ci permette di ottenere un valore approssimato dell'integrale della funzione a partire dai valori di  $f$  come segue:

$$\mathcal{I}(f; a, b) = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i).$$

I punti  $x_i$  si dicono **nod**i;  
i coefficienti  $\omega_i$  si dicono **pesi**.

# Grado di precisione della formula di quadratura

## Definizione

Si dice che una **formula di integrazione numerica** ha **grado di precisione**  $p$  se vale che

$$I(f) = \mathcal{I}(f) \text{ per ogni polinomio } f \text{ di grado } \leq p;$$

$$I(f) \neq \mathcal{I}(f) \text{ per ogni polinomio } f \text{ di grado } > p.$$

## Formula del punto medio

**Nodi:** punto medio dell'intervallo  $(a + b)/2$

Formula del punto medio

$$\mathcal{I}_{PM}(f) = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

**Grado di precisione: 1**

Formula composta del punto medio

$$\mathcal{I}_{PM}^c(f) = H \sum_{k=1}^N f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \quad \text{essendo } H = \frac{b - a}{N}.$$

**Errore:**  $E_{PM}^c(f) = I(f) - \mathcal{I}_{PM}^c(f) = \frac{b - a}{24} H^2 f''(\xi_0)$

## Formula dei trapezi

**Nodi:** gli estremi dell'intervallo  $a$ ,  $b$ .

### Formula dei trapezi

$$\mathcal{I}_T(f) = \frac{(b-a)}{2} (f(a) + f(b)).$$

### Grado di precisione: 1

### Formula composta dei trapezi

$$\mathcal{I}_T^c(f) = H \left( \frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2} \right) \quad \text{essendo } H = \frac{b-a}{N}.$$

**Errore:**  $E_T^c(f) = I(f) - \mathcal{I}_T^c(f) = -\frac{b-a}{12} H^2 f''(\xi_0)$

## Formula di Cavalieri-Simpson

**Nodi:** gli estremi ed il punto medio dell'intervallo  $a$ ,  $b$ ,  $(a + b)/2$ .

### Formula di Cavalieri-Simpson

$$\mathcal{I}_{CS}(f) = \frac{(b-a)}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

**Grado di precisione:** 3

### Formula composta di Cavalieri-Simpson

$$\mathcal{I}_{CS}^c(f) = \frac{H}{6} \left( f(a) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + 4 \sum_{k=1}^N f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + f(b) \right)$$

**Errore:**  $E_{CS}^c(f) = I(f) - \mathcal{I}_{CS}^c(f) = -\frac{b-a}{180} \frac{H^4}{16} f^{(4)}(\xi_0)$

## Formule di Gauss - Legendre

Nella tabella qui sotto,  $n$  indica il grado dei polinomi interpolanti.

$n$	nodì $\hat{x}_i$ $i = 0, \dots, n$	pesi $w_i$ $i = 0, \dots, n$
0	(0)	(2)
1	$(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	(1, 1)
2	$(-\sqrt{15}/5, 0, \sqrt{15}/5)$	(5/9, 8/9, 5/9)

$n$	G.d.P.	ordine
0	1	$CH^2 \max  f^{(2)} $
1	3	$CH^4 \max  f^{(4)} $
2	5	$CH^6 \max  f^{(6)} $

## Formula composta di Gauss

$$\mathcal{I}_G^c(f) = \frac{H}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^n w_i f(x_{ki}) \quad H = \frac{b-a}{N}$$

essendo  $x_{ki} = x_{k-1} + \frac{H}{2}(1 + \hat{x}_i)$ .

## Formule di Gauss - Legendre - Lobatto

$n$	nodì $\hat{x}_i$ $i = 0, \dots, n$	pesi $w_i$ $i = 0, \dots, n$
1	(-1, 1)	(1, 1)
2	(-1, 0, 1)	(1/3, 4/3, 1/3)
3	(-1, $-\sqrt{5}/5$ , $\sqrt{5}/5$ , 1)	(1/6, 5/6, 5/6, 1/6)

$n$	G.d.P.	ordine
1	1	$CH^2 \max  f^{(2)} $
2	3	$CH^4 \max  f^{(4)} $
3	5	$CH^6 \max  f^{(6)} $

### Formula composta di Gauss

$$\mathcal{I}_G^c(f) = \frac{H}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^n w_i f(x_{ki}) \quad H = \frac{b-a}{N}$$

essendo  $x_{ki} = x_{k-1} + \frac{H}{2}(1 + \hat{x}_i)$ .

## Function quadratura

La function **quadratura** calcola il valore approssimato dell'integrale di una funzione mediante le formule composite. Per usare la function dare il comando:

[I] =quadratura(f,a,b,N,metodo)

**Input** f nome della funzione da integrare;  
 a,b estremi dell'intervallo;  
 N numero degli intervalli di suddivisione;  
 metodo=1 uso punto medio;  
 metodo=2 uso trapezi;  
 metodo=3 uso Simpson.

### Esercizio

Testare la function quadratura calcolando gli integrali:

$$\int_{-1}^2 x^4 dx = \frac{33}{5}, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = 2, \quad \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

# Esercizio

## Esercizio 1

Scrivere un programma di tipo script per valutare al variare di  $N$  (numero degli intervallini di suddivisione) e del metodo usato, l'errore di integrazione  $E_{metodo,N}$

$$E_{metodo,N} = |I(f) - I_{metodo,N}(f)|.$$

Riportare in un grafico in scala bilogaritmica l'errore in funzione di  $N$ . Testare il programma utilizzando gli integrali dati precedentemente.

L'ordine di convergenza è in accordo con la stima teorica dell'errore?

## Rappresentazione dell'ordine di convergenza

Supponiamo che la stima dell'errore per un certo metodo sia

$$E(H) \approx CH^p \quad \text{essendo } H = (b - a)/N.$$

Per rappresentare il valore di  $p$ , calcoliamo il logaritmo ad entrambi i membri, ottenendo:

$$\log E(H) \approx \log C + p \log H.$$

Quindi il grafico di  $\log E(H)$  in funzione di  $\log H$  è una retta con coefficiente angolare pari a  $p$ .

Poiché si ha che  $\log H = \log(b - a) - \log N$ , il grafico dell'errore in funzione di  $N$ , è una retta con coefficiente angolare uguale a  $-p$ .

- `loglog(N,E)` produce il grafico di  $\log E(H)$  in funzione di  $\log N$ .
- `loglog(H,E)` produce il grafico di  $\log E(H)$  in funzione di  $\log H$ .

Per verificare il valore di  $p$ , confrontare l'andamento di  $\log E(H)$  con quello di  $p \log N$  con il comando `loglog(N,E,N,1./N.^p)`.

## Traccia dell'esercizio

- ① Assegnare la funzione  $f$ , gli estremi dell'intervallo  $a$  e  $b$  ed il valore esatto dell'integrale  $I_f$ .
- ② Assegnare il vettore  $N=[10,20,40,80,160,320,640]$ .
- ③ Per ciascun metodo (`for metodo=1:3`):
  - Per ciascun valore di  $N$  (`for i=1:length(N)`):
    - Calcolare il valore dell'integrale approssimato  $I_{\text{approx}}$ .
    - Calcolare l'errore relativo:  

$$E(\text{metodo},i)=\text{abs}(I_f-I_{\text{approx}})/\text{abs}(I_f).$$
- ④ Plottare gli errori in scala bilogaritmica per ciascun metodo confrontandoli con le stime teoriche:  
 $\text{loglog}(N,E,N,1./N.^2,N,1./N.^4)$

## Function quadGL e quadGLL

Le function `quadGL` e `quadGLL` permettono di calcolare l'integrale di una funzione usando le formule di quadratura di Gauss-Legendre e di Gauss-Legendre-Lobatto rispettivamente.

### Esercizio facoltativo

Ripetere l'esercizio precedente usando le formule di quadratura gaussiane.

# Effetto della regolarità della funzione

## Esercizio 2

Per  $\alpha = \ell + 1/3$  si calcoli l'integrale

$$\int_0^3 |x^2 - 5|^\alpha dx$$

usando le formule di integrazione numerica implementate nella function `quadratura`. Per ciascuna formula individuare il valore di  $\ell$  per il quale la formula di integrazione numerica converge con l'ordine previsto dalla teoria.

Per calcolare l'errore usare come valore esatto quello fornito con il seguente comando di Matlab

```
quad(f, a, b, 1e-13)
```

# L'integrazione numerica con MATLAB

Funzione	Significato
quad	Formula di Simpson adattativa.
quadl	Formula di Gauss-Lobatto adattativa.
quadgk	Quadratura adattativa Gauss-Kronrod funziona anche su intervalli illimitati
dblquad	Formula di quadratura per integrali doppi su rettangoli.
trapez	Calcola l'approssimazione di un integrale con la formula dei trapezi.

## Indicazioni per l'uso

`quad` è più efficiente se usata con minore accuratezza per funzioni non regolari.

`quadl` è più efficiente di `quad` con elevata accuratezza per funzioni regolari.

## quad, quadl

Sia **f** il nome della funzione di tipo @.

Calcolo di  $\int_a^b f(x)dx$

>> `q=quad(f,a,b)`      formula di Simpson adattativa;  
 >> `q=quadl(f,a,b)`      formula di Gauss-Lobatto adattativa;

`q=quadl(f,a,b,tol)`

modifica il valore della tolleranza usata (default 1.e-6).

`[q,fcnt]=quadl(f,a,b)`

restituisce il numero di valutazioni della funzione.

`[q,fcnt]=quadl(f,a,b,[],trace)`

se **trace** assume un valore diverso da zero, vengono mostrati i valori di `[fcnt a b-a Q]` durante il procedimento. Le parentesi `[]` servono per tenere il posto della tolleranza ed usare il suo valore di default.

# Function **trapz**

$$Z = \text{trapz}(X,Y)$$

calcola l'integrale di una funzione data per punti essendo **X** il vettore delle ascisse e **Y** il vettore dei corrispondenti valori della funzione.

## Formule adattative

Il passo di integrazione  $H$  può essere scelto in modo da garantire che l'errore sia inferiore ad una tolleranza  $\varepsilon$  prestabilita.

Se usiamo la formula di Simpson si dovrebbe trovare  $H$  tale che

$$\frac{b-a}{180} \frac{H^4}{16} M < \varepsilon, \quad \text{essendo } M = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

## La funzione $\arctan(ax)$

Sia  $f(x) = \arctan(ax)$ , allora si ha

$$f^{(4)}(x) = -\frac{24a^7x^3 - 24a^5x}{(a^2x^2 + 1)^4}$$

$$\int_{-1}^5 f(x) dx = \left[ x \arctan(ax) - \frac{1}{2a} \log(a^2x^2 + 1) \right]_{-1}^5$$

### Esercizio 3

- Per  $a = 1$  ed  $a = 10$ , fare il grafico della funzione  $f(x) = \arctan(ax)$  e della sua derivata quarta sull'intervallo  $[-1, 5]$  in due figure differenti.
- Determinare numericamente

$$M = \max_{-1 \leq x \leq 5} |f^{(4)}(x)|$$

e trovare il valore di  $H$  per cui l'errore è minore di  $\text{tol}=1.e-6$  per  $a = 1$  e  $a = 10$ .

- Calcolare il valore dell'integrale usando la formula di Cavalieri-Simpson composta con il valore di  $H$  trovato al punto precedente.
- Confrontare l'errore relativo ottenuto ed il numero di valutazioni della funzione effettuate con quelli dati dalla funzione `quad` di Matlab.
- Calcolare l'errore che si ottiene usando il metodo di Cavalieri-Simpson con lo stesso numero di valutazioni della funzione richiesto da `quad`.